НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М. П. ДРАГОМАНОВА

Г. О. МИХАЛІН, Л. І. ДЮЖЕНКОВА

РЯДИ

навчальний посібник

КИЇВ 2000

Ряди: Навчальний посібник / Г. О. Михалін, Л. І. Дюженкова. – Київ, НПУ імені М. П. Драгоманова, 2000. – 66 с.

Дана робота є частиною навчального посібника “Математичний аналіз для майбутніх учителів математики”.

Запропоновано оригінальний підхід до викладу теми “Елементарна теорія рядів” з урахуванням професійної спрямованості курсу математичного аналізу.

Рекомендовано студентам математичних спеціальностей та викладачам педагогічних вузів.

Рецензенти:

І. О. Шевчук, доктор фіз.-мат. наук, професор Нац. ун-ту імені Т. Г. Шевченка

М. В. Працьовитий, доктор фіз.-мат. наук, професор Нац. пед. ун-ту імені М. П. Драгоманова

Адреса видавництва: Україна, 01030, вул. Пирогова, 9, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Передмова

Дана робота є частиною навчального посібника “Математичний аналіз для майбутніх учителів математики”. Два попередні розділи “Границя і неперервність функції” вийшли з друку в 1997 р., а розділ “Диференціальне числення функцій однієї змінної” – у 1998 р. Запропонований розділ є проміжним між зазначеними вище.

У курсі математичного аналізу ряди є основним апаратом дослідження функцій.

Тому поняття ряду та його суми слід вводити якомога раніше, щоб можна було ним користуватися при вивченні перших розділів аналізу. На рівні, близькому до інтуїтивного, воно вводиться на початку курсу в темі “Дійсні та комплексні числа”. У даному розділі розглядаються основні факти про числові, функціональні та степеневі ряди. Властивості, пов’язані з диференціюванням та інтегруванням рядів, розглядатимуться пізніше у відповідних розділах аналізу.

Так само як і в теорії границь, означення ряду вводиться одночасно для функції дійсної та комплексної змінних. За формою воно однакове в обох випадках. Тому формулювання основних тверджень та їх доведення при цьому не ускладнюються, тоді як можливості застосування цих тверджень значно розширюються.

Хоча поняття ряду не вводиться в курсі математики загальноосвітньої школи, проте вчитель математики повинен володіти цим поняттям, щоб розуміти, зокрема, що нескінченний десятковий дріб по суті є числовим рядом, а сума всіх членів спадної геометричної прогресії є сумою відповідного числового ряду.

Розділ містить п’ять параграфів.

У першому параграфі вводяться основні поняття, пов’язані з числовими рядами.

Другий параграф присвячено вивченню додатних рядів. Розглядається критерій їхньої збіжності та деякі достатні умови (ознаки збіжності).

Далі розглядаються ряди з довільними членами і, зокрема, так звані знакопочережні ряди, властивості абсолютно та умовно збіжних рядів.

У четвертому параграфі вивчаються функціональні послідовності та ряди. Велику увагу звернено на рівномірно збіжні послідовності та ряди.

Нарешті, останній параграф присвячено вивченню степеневих рядів.

Наведено багато прикладів, які дають змогу глибше вникнути в суть самої теорії.

Структура викладення матеріалу така.

Кожний параграф розбито на пункти, у яких крім теоретичного матеріалу розглядаються такі питання: історична довідка, зв'язок із шкільним курсом математики, постановка проблем і контрольні запитання та завдання.

Рисунки подано в кінці посібника.

Широко використовується логічна символіка та деякі скорочення, зміст яких розкривається у наведеній нижче таблиці.

Символ	Слова, які замінює даний символ
$\forall$	для будь-якого; для кожного; для всіх
$\exists$	існує; знайдеться
$:$	такий, що; тих, кожний з яких; а саме
$:=$ $(=:)$	дорівнює за означенням (надається значення)
$\Rightarrow$	випливає; якщо ..., то
$\Leftrightarrow$	тоді й тільки тоді; необхідно й достатньо; якщо (в означенні)
► (◄)	початок доведення (кінець доведення)
$\to$	прямує до
$\rightrightarrows$	рівномірно збігається
$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{C}$	множина комплексних чисел

Розділ 5. РЯДИ

5.1. Числові ряди. Основні властивості рядів

Ряди в математичному аналізі є основним апаратом дослідження функцій. Зокрема, за допомогою рядів можна обчислювати наближені значення функцій.

Спочатку розглянемо так звані числові ряди.

5.1.1. Поняття числового ряду та його суми

Нехай дано числову послідовність (z_n). У розділі 1 визначено суму $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тобто суму n перших членів послідовності (z_n). Виникає питання, чи можна якось визначити "суму всіх членів"послідовності. Відповісти на це питання допоможуть такі означення.

Числовим рядом або просто *рядом* називають вираз

$$z_1 + z_2 + ... + z_n + ... =: \sum_{n=1}^{\infty} z_n. \tag{1}$$

При цьому z_n називають *n-м* або *загальним членом ряду* (зокрема, z_1 – *першим,* z_2 - *другим* і т.д.), суму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ називають *n-ою частинною сумою ряду*, а послідовність (S_n) – *послідовністю частинних сум* даного ряду.

Зауважимо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k,$ тобто у формулі (1) індекс сумування можна позначати різними літерами, тоді як запис частинної суми у вигляді $\sum\limits_{n=1}^{n} z_n$ не є коректним (краще писати $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k,$ тобто верхній індекс суми та індекс сумування слід позначати різними літерами).

Якщо існує границя (скінченна або нескінченна) послідовності (S_n) частинних сум ряду (1), то число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називають *сумою даного ряду* і записують $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$. У випадку, коли S – скінченне число, ряд (1) називають *збіжним* до S, в іншому разі – *розбіжним*.

Зрозуміло, що ряд (1) цілком визначається своїм загальним членом або послідовністю (S_n) його частинних сум, оскільки $z_1 = S_1$, а

$$z_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k=1}^{n-1} z_k \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2.$$

Тому числовим рядом іноді називають послідовність (S_n), де $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Навпаки, будь-яку послідовність (z_n) можна розглядати як послідовність частинних сум деякого ряду. Справді, частинні суми ряду

$$z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + (z_4 - z_3) + \ldots$$

збігаються з членами даної послідовності.

► Нехай ряд (1) є збіжним і $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = S$. Тоді $z_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$, якщо $n \to \infty$. ◄

Отже, має місце таке твердження.

Теорема 1 (необхідна умова збіжності ряду). *Якщо ряд* (1) *є збіжним, то його загальний член* $z_n \to 0$, *коли* $n \to \infty$.

Теорему 1 можна сформулювати ще так.

Теорема 1* (достатня умова розбіжності ряду). *Якщо* $z_n \not\to 0$, *коли* $n \to \infty$, *то ряд* (1) *є розбіжним.*

5.1.2. Приклади збіжних і розбіжних рядів

1. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Загальний член цього ряду $z_n = (-1)^{n-1} \not\to 0$, коли $n \to \infty$. Отже, згідно з теоремою 1*, даний ряд є розбіжним.

Зауважимо, що розбіжність даного ряду можна довести, користуючись означенням. Дійсно, маємо $S_1 = z_1 = (-1)^0 = 1$, $S_2 = z_1 + z_2 = 1 - 1 = 0$, $S_3 = z_1 + z_2 + z_3 = 1 - 1 + 1 = 1$.

Припустимо, що $S_{2m-1} = 1$, а $S_{2m} = 0$. Тоді $S_{2(m-1)-1} = S_{2m+1} = S_{2m} + z_{2m+1} = 0 + (-1)^{2m} = 1$, а $S_{2(m+1)} = S_{2m+2} = S_{2m+1} + z_{2m+2} = 1 + (-1)^{2m+1} = 0$.

Отже, згідно з принципом математичної індукції, $S_{2n-1} = 1$, а $S_{2n} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тому послідовність (S_n) частинних сум даного ряду не має ні скінченної, ні нескінченної границі. Таким чином, даний ряд не має суми, тобто є розбіжним.

2. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp i(n-1)x$, де x – фіксоване дійсне число. Загальний член цього ряду $z_n = \exp i(n-1)x = \cos(n-1)x + i\sin(n-1)x$.

Оскільки $|z_n| = \sqrt{\cos^2(n-1)x + \sin^2(n-1)x} = 1 \not\to 0$, коли $n \to \infty$, то необхідна умова збіжності ряду не виконується, і тому даний ряд є розбіжним. Зауважимо, що ряд з прикладу 1 є частинним випадком даного ряду.

Дійсно, якщо $x = \pi$, то маємо $z_n = \cos(n-1)\pi + i\sin(n-1)\pi = (-1)^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Узагальненням ряду, розглянутого в попередньому прикладі, є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \tag{2}$$

де $a \neq 0$ і q - задані комплексні числа. Даний ряд називають *геометричним рядом* або *геометричною прогресією*.

Загальний член геометричного ряду $z_n = aq^{n-1}$, зокрема, $z_1 = a$. Тому число a називають *першим членом геометричого ряду*. Оскільки $z_{n+1} = aq^n = z_n q$, то число q називають *знаменником геометричної прогресії*.

Знайдемо частинні суми ряду (2).

Зауважимо, що при $q = 1$ маємо $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a = na$.

Якщо $q \neq 1$, то

$$S_n - qS_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} aq^k =$$

$$= (a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + \ldots aq^{n-1} + aq^n) = a - aq^n$$

$$\iff S_n(1-q) = a - aq^n \iff S_n = \frac{a}{1-q}(1-q^n).$$

З'ясуємо питання про збіжність геометричного ряду. Треба розглянути три випадки:

$$1)\ |q| < 1, \quad 2)\ |q| > 1, \quad 3)\ |q| = 1.$$

У випадку 1) маємо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, і тому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q}\,(1-q^n) = \frac{a}{1-q}.$$

Отже, геометричний ряд є збіжним, і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$.

У випадку 2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. Тому $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, отже, ряд є розбіжним.

Нарешті, у випадку 3) маємо $|z_n| = |aq^{n-1}| = |a||q|^{n-1} = |a| \not\to 0$, коли $n \to \infty$, і тому ряд є розбіжним.

Таким чином, справджується таке твердження.

Теорема 2 (про збіжність геометричного ряду). *Для того щоб геометричний ряд* (2) *збігався, необхідно й достатньо, щоб* $|q| < 1$. *При цьому його сума* $S = \dfrac{a}{1-q}$.

4. Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{3}$$

називають *гармонічним рядом.* Його загальний член $z_n = \dfrac{1}{n}$.

Відомо, що послідовність $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ є неспадною і $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ (див. п. 3.2.1). Отже, $(1+\dfrac{1}{n}) \le e \quad \forall n \in \mathbb{N}$, і тому

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \ln e \Longleftrightarrow$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \ge \ln\frac{n+1}{n}.$$

Звідси випливає, що

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} =$$

$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, то з останньої рівності дістаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Таким чином, *гармонічний ряд має нескінченну суму і тому є розбіжним*. При цьому його загальний член $z_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, коли $n \to \infty$. Тому умова $z_n \to 0$, коли $n \to \infty$, є тільки необхідною для збіжності ряду (1).

Розглянуті приклади показують, що ряд може мати скінченну суму і бути збіжним, може мати нескінченну суму і бути розбіжним, а також може не мати суми і теж бути розбіжним.

5.1.3. Деякі властивості збіжних рядів

Лінійною комбінацією рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)} \qquad (A) \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)} \qquad (B)$$

називають ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 z_n^{(1)} + \alpha_2 z_n^{(2)}), \tag{C}$$

де α_1 і α_2 – довільні фіксовані числа (дійсні або комплексні).

Зокрема, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n^{(1)} + z_n^{(2)})$ називають *сумою рядів* (A) і (B), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n^{(1)} - z_n^{(2)})$ – *різницею цих рядів*, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_1 z_n^{(1)}$ - *добутком ряду* (A) *на сталу* α_1.

► Припустимо, що ряди (A) і (B) є збіжними відповідно до сум $S^{(1)}$ та $S^{(2)}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^{(1)} = S^{(1)}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^{(2)} = S^{(2)}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)}) = \alpha_1 \sum_{k=1}^{n} z_k^{(1)} + \alpha_2 \sum_{k=1}^{n} z_k^{(2)},$$

і за властивостями границі послідовності маємо

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)}) =$$

$$= \alpha_1 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k^{(1)} + \alpha_2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k^{(2)} = \alpha_1 S^{(1)} + \alpha_2 S^{(2)}.$$

Останнє означає, що ряд (C) є збіжним до суми $S = \alpha_1 S^{(1)} + \alpha_2 S^{(2)}$. ◀

Отже, доведено таку властивість.

Властивість 1 (лінійності). *Якщо ряди* (A) і (B) *є збіжними до сум* $S^{(1)}$ *і* $S^{(2)}$ *відповідно, то лінійна комбінація* (C) *цих рядів є збіжним рядом, сума якого* $S = \alpha_1 S^{(1)} + \alpha_2 S^{(2)}$.

Зауважимо, що ряд вигляду

$$\alpha_1 z_1^{(1)} + \alpha_2 z_1^{(2)} + \alpha_1 z_2^{(1)} + \alpha_2 z_2^{(2)} + \dots + \alpha_1 z_k^{(1)} + \alpha_2 z_k^{(2)} + \dots, \tag{4}$$

взагалі кажучи, не є лінійною комбінацією рядів (A) і (B), оскільки його загальний член $z_n{=}\alpha_1 z_k^{(1)}$, коли $n = 2k-1$, і $z_n = \alpha_2 z_k^{(2)}$, коли $n = 2k$, тоді як лінійна комбінація даних рядів має загальний член

$$z_n^* = \alpha_1 z_n^{(1)} + \alpha_2 z_n^{(2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Проте неважко показати, що за умови властивості 1 ряд (4) також є збіжним до суми $\alpha_1 S^{(1)} + \alpha_2 S^{(2)}$.

Справді, при $n \to \infty$ для частинних сум ряду (4) маємо

$$S_{2n} = \alpha_1 z_1^{(1)} + \alpha_2 z_1^{(2)} + \alpha_1 z_2^{(1)} + \alpha_2 z_2^{(2)} + \dots + \alpha_1 z_n^{(1)} + \alpha_2 z_n^{(2)} =$$

$$= \alpha_1 S_n^{(1)} + \alpha_2 S_n^{(2)} \to \alpha_1 S^{(1)} + \alpha_2 S^{(2)},$$

$$S_{2n-1} = S_{2n} - z_{2n} = S_{2n} - \alpha_2 z_n^{(2)} \to \alpha_1 S^{(1)} + \alpha_2 S^{(2)},$$

бо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(2)} = 0$ внаслідок необхідної умови збіжності ряду.

Уважно проаналізувавши ряд (4), помічаємо, що лінійну комбінацію рядів (A) і (B) можна дістати з ряду (4), якщо в останньому згрупувати доданки так:

$$(\alpha_1 z_1^{(1)} + \alpha_2 z_1^{(2)}) + (\alpha_1 z_2^{(1)} + \alpha_2 z_2^{(2)}) + \dots + (\alpha_1 z_n^{(1)} + \alpha_2 z_n^{(2)}) + \dots \,. \tag{5}$$

При цьому, як показано вище, суми рядів (4) і (5) однакові.

У зв'язку з цим виникає таке питання. Якщо в довільному збіжному ряді (1) певним чином згрупувати його члени

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_{n_1}) + (z_{n_1+1} + \dots + z_{n_2}) + \dots + (z_{n_{k-1}+1} + \dots + z_{n_k}) + \dots, \tag{6}$$

то що можна сказати про збіжність ряду (6) та про його суму?

Відповідь на це питання дає така властивість.

Властивість 2 (сполучна, або асоціативна). *Якщо ряд* (1) *є збіжним до суми* S, *то для будь-якої зростаючої послідовності* (n_k) *натуральних чисел ряд* (6) *також є збіжним до* S.

► Нехай $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ – n-а частинна сума ряду (1). Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Знайдемо m-ту частинну суму ряду (6) . Маємо

$$W_m = (z_1 + z_2 + \dots + z_{n_1}) + \dots + (z_{n_{m-1}+1} + \dots + z_{n_m}) =$$

$$= z_1 + z_2 + \dots + z_{n_m} = S_{n_m} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Звідси, враховуючи властивість про границю підпослідовності, дістаємо, що $\lim\limits_{m\to\infty} W_m = \lim\limits_{m\to\infty} S_{n_m} = S$. ◄

Зауважимо, що коли ряд (1) є розбіжним, то після групування його членів можна дістати збіжний ряд. Наприклад, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{k-1} + \dots$$

є розбіжним (див. приклад 1), проте ряд

$$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$$

є збіжним, і його сума дорівнює нулю.

Нехай дано ряд (1). Його *n-м залишком* називають ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{n+k}$, тобто ряд вигляду

$$z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+k} + \dots, \tag{7}$$

де $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване число. Іншими словами, якщо від даного ряду відкинути його n перших членів, то дістанемо n-й залишок цього ряду.

► Нехай $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} z_k$ – m-та частинна сума ряду (1), число $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване і

$$W_m = \sum_{k=1}^{m} z_{n+k} = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+m} = S_{n+m} - S_n$$

– m-та частинна сума ряду (7), тобто n-го залишку ряду (1).

Оскільки n – фіксоване число, то фіксованим є й число S_n. Тому

$$r_n = \lim_{m\to\infty} W_m = \lim_{m\to\infty} S_{n+m} - S_n = S - S_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

за умови, що послідовність (S_m) є збіжною до числа S. Навпаки, якщо послідовність (W_m) збігається до числа r_n, то $W_{m-n} = S_m - S_n$, тобто $S_m = W_{m-n} + S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$S = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} W_{m-n} - S_n = r_n - S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, ряд (1) є збіжним до суми S тоді й тільки тоді, коли ряд (7) є збіжним до суми $r_n = S - S_n$. ◄

Таким чином, доведено таку властивість.

Властивість 3 (про збіжність ряду та його залишку). *Ряд* (1) *і будь-який його n-й залишок* (7) *одночасно збігаються або розбігаються. При цьому, якщо ряд* (1) *збігається до суми S, то ряд* (7) *збігається до суми $r_n = S - S_n$.*

Зауважимо, що для збіжного ряду (1) сума його n-го залишку характеризує абсолютну похибку наближеної рівності $S \approx S_n$. Крім того,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Отже, *абсолютну похибку наближеної рівності $S \approx S_n$ можна зробити як завгодно малою, якщо взяти номер n достатньо великим.*

5.1.4. Критерій Коші

Оскільки збіжність ряду визначається за допомогою збіжності послідовності, для якої має місце критерій Коші її збіжності, то природно дослідити, якої форми набуде цей критерій для випадку числового ряду.

За означенням ряд (1) є збіжним тоді й тільки тоді, коли послідовність $(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k)$ його частинних сум є збіжною. Згідно з критерієм Коші збіжності послідовності, вказана вище послідовність є збіжною тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $n_o(\varepsilon)$, що для всіх $m > n \geq n_0$ маємо

$$\Big| \sum_{k=1}^{m} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_k \Big| = \Big| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \Big| = |z_{n+1} + z_{n+2} \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon,$$

де число p визначається рівністю $n + p = m$, тобто $p = m - n$, і тому може бути довільним натуральним числом.

Звідси випливає справедливість такого твердження.

Теорема 3 (критерій Коші збіжності ряду). *Для того щоб ряд* (1) *був збіжним, необхідно й достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існувало число* $n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n \geq n_0$ *і для всіх натуральних* p *виконувалась нерівність*

$$|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Зауважимо, що критерій Коші дає лише умову збіжності ряду і нічого не каже про його суму, проте він має широкі застосування. Зокрема, його зручно використовувати при доведенні розбіжності ряду. Наприклад, якщо застосувати критерій Коші до гармонічного ряду, то дістанемо

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+n}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Тому вираз $|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}|$ не можна зробити меншим за $\varepsilon = \frac{1}{2}$ для всіх достатньо великих n, якщо взяти $p = n$. Отже, згідно з критерієм Коші, гармонічний ряд є розбіжним.

5.1.5. Зв'язок між збіжністю рядів з комплексними та з дійсними членами

► Нехай $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ і $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ – n-ті частинні суми рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ (1), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ відповідно, причому $z_n = x_n + iy_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, де x_n, y_n – дійсні числа.

Тоді зрозуміло, що

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sum_{k=1}^{n} y_k = X_n + iY_n.$$

Користуючись тепер властивістю про зв'язок збіжності послідовності з комплексними членами із збіжністю дійсних послідовностей, дістаємо, що послідовність (S_n) є збіжною тоді й тільки тоді, коли збіжними є послідовності (X_n) і (Y_n), причому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} X_n + i \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$.

Отже, ряд (1) є збіжним до S тоді й тільки тоді, коли ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ є збіжними відповідно до сум $X = \operatorname{Re} S$ і $Y = \operatorname{Im} S$. ◄

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 4 (про зв'язок між збіжністю рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$). *Нехай* $x_n = \mathrm{Re}\ z_n$, $y_n = \mathrm{Im}\ z_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тоді ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *збігається до суми* S *тоді й тільки тоді, коли ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *збігаються відповідно до* $X = \mathrm{Re}\, S$ *та* $Y = \mathrm{Im}\, S$.

5.1.6. Історична довідка

Фактично справу з рядами мали вже математики часів сивої давнини. Так, Архімед умів знаходити суму геометричної прогресії. Розбіжність гармонічного ряду була доведена італійським математиком П.Менголі. У роботах математиків XVIII ст. ряди зустрічаються досить часто, проте не завжди звертається увага на питання їхньої збіжності. Сучасна теорія рядів бере свій початок з робіт німецького математика К.Гауса, чеського математика Б.Больцано та французького математика О.Коші.

5.1.7. Зв'язок із шкільним курсом математики

Хоча поняття числового ряду не вивчається у шкільному курсі математики загальноосвітньої школи, вчитель повинен володіти цим поняттям, бо без нього він не розумітиме багатьох інших понять. Наприклад, нескінченний десятковий дріб по суті є числовим рядом, а сума всіх членів спадної геометричної прогресії є сумою відповідного числового ряду. Як показано у п. 3.2.3, значення експоненціальної функції в довільній точці x також є сумою числового ряду, і цим зручно користуватися для обчислення $\exp x$.

5.1.8. Постановка проблем

У розглянутому параграфі доведено критерій Коші збіжності довільного числового ряду. Проте він не завжди є зручним для практичних застосувань. У зв'зку з цим постає питання про встановлення менш загальних, але зручніших для практичних застосувань достатніх умов збіжності числових рядів.

5.1.9. Контрольні запитання та завдання

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо відомо загальний член ряду, то відома й послідовність частинних сум цього ряду;
2) твердження, обернене до 1), є правильним;
3) будь-який ряд має суму;
4) якщо ряд має суму, то він є збіжним;
5) твердження, обернене до 4), є правильним;
6) кожний ряд є або збіжним, або розбіжним;
7) якщо загальний член ряду $z_n \to 0$, коли $n \to \infty$, то ряд (1) є збіжним;
8) якщо ряд (1) є розбіжним, то $z_n \not\to 0$, коли $n \to \infty$;
9) кожний геометричний ряд має суму;
10) якщо в геометричному ряді $q < 1$, то він є збіжним;
11) якщо $|q| < 1$, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$;
12) гармонічний ряд не має суми;
13) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n^{(1)} + z_n^{(2)})$ є збіжним, то збіжними є також ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}$;
14) ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}$ збіжні тоді й тільки тоді, коли збіжними є ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n^{(1)} + z_n^{(2)})$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n^{(1)} - z_n^{(2)})$;
15) якщо ряд (4) є розбіжним, то й ряд (1) також розбігається;
16) якщо деякий залишок ряду (1) є збіжним, то й будь-який залишок цього ряду збігається;
17) ряд (1) розбігається тоді й тільки тоді, коли існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного n_0 знайдуться натуральні $n \geq n_0$ і p, такі що має місце нерівність

$$|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| \geq \varepsilon;$$

18) якщо ряд (1) розбіжний, то розбіжними є й ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

2. Довести дані твердження.

1) Якщо сумою ряду (1) є скінченне число S, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ – частинна сума цього ряду і $C_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = S$.

2) Якщо S_n і C_n визначено так само, як у вправі 1), а $z_k = (-1)^{k-1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$, проте ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ не має суми.

3) Якщо S_n і C_n визначено так само, як у вправі 1), то для довільного ряду (1) з дійсними членами

$$\varliminf_{n\to\infty} S_n \le \varliminf_{n\to\infty} C_n \le \varlimsup_{n\to\infty} C_n \le \varlimsup_{n\to\infty} S_n.$$

Зокрема, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ – сума ряду (1) (скінченна або нескінченна), то й $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = S$.

5.2. Додатні ряди

У цьому параграфі для додатних рядів установимо деякі ознаки їхньої збіжності.

5.2.1. Критерій збіжності додатного ряду

Нехай $z_n = x_n \in \mathbb{R}$. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{8}$$

називають *додатним*, якщо $x_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Наприклад, ряди $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \quad \forall p \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \quad \forall q \ge 0$ і $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ є додатними, а ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \quad \forall q < 0$ не є додатними.

► Розглянемо довільний додатний ряд (8). Для частинних сум цього ряду маємо $S_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k = S_n + x_{n+1} \ge S_n$. Отже, послідовність (S_n) частинних сум додатного ряду є неспадною. Тому, згідно з теоремою про границю монотонної послідовності, існує $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, причому S – скінченне число, якщо (S_n) – обмежена послідовність, і $S = +\infty$ – у противному разі. ◄

Таким чином, справедливим є таке твердження.

Теорема 1 (критерій збіжності додатного ряду). *Додатний ряд є збіжним тоді й тільки тоді, коли послідовність його частинних сум є обмеженою.*

Цей критерій, як і критерій Коші, не завжди зручно застосовувати на практиці, проте за його допомогою можна дістати досить прості достатні умови збіжності збіжності додатних рядів.

5.2.2. Ознаки порівняння

► Розглянемо два додатних ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A) \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B).$$

Припустимо, що існують такі числа $n_0 \in \mathbb{N}$ і $H > 0$, що $a_n \le Hb_n \ \ \forall n \ge n_0$. За властивістю про збіжність ряду та його залишку будь-яка зміна перших n_0 членів даного ряду не впливає на його збіжність. Тому можна вважати, що нерівність $a_n \le Hb_n$ виконується $\forall n \in \mathbb{N}$, бо в іншому разі, змінюючи a_n або b_n для $n < n_0$, можна дійти до рівностей $a_n = b_n \ \ \forall n < n_0$.

Тепер припустимо, що ряд (B) є збіжним. Тоді, згідно з теоремою 1, послідовність (B_n) його частинних сум є обмеженою, тобто $\exists M > 0 : 0 \le B_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що

$$0 \le A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} Hb_k = HB_n \le HM \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

тобто послідовність частинних сум ряду (A) є обмеженою, і тому цей ряд є збіжним знову ж таки за теоремою 1.

Нехай тепер ряд (A) є розбіжним. Тоді, якщо припустити збіжність ряду (B), то за доведеним вище дістанемо збіжність ряду (A), що неможливо. Тому з розбіжності ряду (A) випливає розбіжність і ряду (B). ◄

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 2 (перша ознака порівняння). *Нехай ряди (A) і (B) додатні, причому існують такі $n_0 \in \mathbb{N}$ і $H > 0$, що*

$$a_n \le Hb_n \quad \forall n \ge n_0.$$

Тоді збіжність ряду (B) гарантує збіжність ряду (A), а розбіжність ряду (A) гарантує розбіжність ряду (B).

З а у в а ж е н н я. Ознака порівняння фактично стверджує, що збіжність ряду з більшими членами гарантує збіжність ряду з меншими членами, а розбіжність ряду з меншими членами гарантує розбіжність ряду з більшими членами. З теореми 2 неважко дістати іншу ознаку порівняння збіжності додатних рядів.

Теорема 3 (друга ознака порівняння). *Якщо ряди (A) і (B) додатні та існують такі числа $q > p > 0$ і $n_0 \in \mathbb{N}$, що*

$$0 < p \leq \frac{a_n}{b_n} \leq q < +\infty,$$

то дані ряди одночасно збігаються або розбігаються.

Зокрема, останнє твердження є правильним, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r$, де $0 < r < +\infty$.

Пропонуємо читачеві самостійно довести цю теорему.

Звернемо увагу на те, що ознаки порівняння зручно використовувати тоді, коли даний ряд можна порівняти з відомими рядами, наприклад з геометричним (2), гармонічним (3) або узагальненим гармонічним (10) рядами.

5.2.3. Ознаки Д'Аламбера

Якщо розглянути геометричний ряд (2), загальний член якого $x_n = aq^{n-1}$, де $q > 0$, то

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{aq^n}{aq^{n-1}} = q.$$

При цьому, коли $q < 1$, то геометричний ряд є збіжним, а коли $q \geq 1$, то – розбіжним.

У зв'язку з цим виникає бажання зробити певні висновки про збіжність ряду (A) за відношенням $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

► Припустимо, що $\exists\, 0 < q < 1$ і $n_0 \in \mathbb{N}:\ D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq n_0$. Тоді

$$a_{n_0+1} \leq qa_{n_0}, \quad a_{n_0+2} \leq qa_{n_0+1} \leq q^2 a_{n_0}.$$

Нехай далі $a_{n_0+m} \leq q^m a_{n_0}$. Тоді

$$a_{n_0+m+1} \leq qa_{n_0+m} \leq q^{m+1} a_{n_0}.$$

Отже, згідно з принципом математичної індукції, маємо $a_{n_0+k} \le q^k a_{n_0}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. У правій частині останньої нерівності записано загальний член геометричного ряду, в якому $q \in (0;1)$. Тому цей ряд є збіжним, а отже, й ряд (A) також є збіжним.

Припустимо тепер, що існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad \forall n \ge n_0.$$

Тоді, як і раніше, показуємо, що $a_{n_0+k} \ge a_{n_0}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, тобто $a_n \not\to 0$, коли $n \to \infty$. Тому ряд (A) є розбіжним. ◀

Проведені міркування дають змогу сформулювати таке твердження.

Теорема 4 (перша ознака Д'Аламбера). *Додатний ряд (A) збігається, якщо існують такі числа $n_0 \in \mathbb{N}$ і $q \in (0;1)$, що*

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \quad \forall n \ge n_0,$$

і розбігається, коли $D_n \ge 1$ $\forall n \ge n_0$, оскільки тоді $a_n \not\to 0$, $n \to \infty$.

Іноді для оцінки відношення $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ зручніше знайти його границю.

► Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, причому $0 \le D \le +\infty$. Тоді можливими є такі три випадки:

$$1)\ \ D < 1, \quad 2)\ \ D > 1, \quad 3)\ \ D = 1.$$

Якщо $D < 1$, то за означенням границі послідовності для числа $q \in (D;1)$ знайдеться такий номер n_0, що $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$ для всіх $n \ge n_0$. Звідси за теоремою 4 дістаємо, що ряд (A) є збіжним.

Якщо $D > 1$, то для числа $q \in (1;D)$ знайдеться такий номер n_0, що для всіх $n \ge n_0$ матимемо $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge q > 1$, і тоді за теоремою 4 ряд (A) є розбіжним.

Неважко показати, що у випадку 3) ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Справді, для гармонічного ряду (3), який є розбіжним, маємо

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1 = D, \quad n \to \infty.$$

Однак для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{9}$$

маємо

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \to 1 = D, \quad n \to \infty,$$

а

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \ \ n \to \infty.$$

Отже, ряд (9) є збіжним і задовольняє умову 3). ◀

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 5 (друга ознака Д'Аламбера). *Нехай ряд* (A) *є додатним та існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. *Тоді:*

1) *якщо* $D < 1$, *то цей ряд збігається;*

2) *якщо* $D > 1$, *то – розбігається, причому* $a_n \not\to 0$, $n \to \infty$;

3) *якщо* $D = 1$, *то ряд може бути збіжним або розбіжним.*

Зауважимо, що ознаки Д'Аламбера зручно використовувати у тих випадках, коли загальний член ряду містить добутки, степені та факторіали.

Крім того, другу ознаку Д'Аламбера називають також ознакою Д'Аламбера у граничній формі.

5.2.4. Ознаки Коші

Знову повернемося до геометричного ряду (2) із загальним членом $x_n = aq^{n-1}$, де $a > 0$ і $q > 0$. Тоді $\sqrt[n]{x_n} = q\sqrt[n]{a/q} \to q$, коли $n \to \infty$. Якщо при цьому $q < 1$, то ряд є збіжним, а коли $q > 1$, то – розбіжним.

У зв'язку з цим виникає бажання зробити певні висновки про збіжність додатного ряду (A) залежно від поведінки $K_n = \sqrt[n]{a_n}$ при $n \to \infty$.

▶ Нехай існують такі числа $q \in (0;1)$ і $n_0 \in \mathbb{N}$, що $K_n = \sqrt[n]{a_n} \le q$ $\forall n \ge n_0$. Тоді $a_n \le q^n$ $\forall n \ge n_0$, і за першою ознакою порівняння ряд (A) є збіжним.

Якщо існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що $K_n = \sqrt[n]{a_n} \ge 1$ $\forall n \ge n_0$, то $a_n \ge 1$ $\forall n \ge n_0$, і тому $a_n \not\to 0$, коли $n \to \infty$. Отже, у цьому випадку ряд (A) розбігається. ◀

Доведено таке твердження.

Теорема 6 (перша ознака Коші). *Додатний ряд (A) є збіжним, якщо існують такі числа* $q \in (0;1)$ *і* $n_0 \in \mathbb{N}$, *що* $K_n = \sqrt[n]{a_n} \le q \quad \forall n \ge n_0$.

У випадку, коли $K_n \ge 1$, *даний ряд розбігається, причому* $a_n \not\to 0$, *коли* $n \to \infty$.

Іноді для оцінки $\sqrt[n]{a_n}$ зручніше знайти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$ або $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

► Припустимо, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = K$ і $0 \le K \le +\infty$. Тоді можливими є три випадки:

$$1)\ K < 1, \quad 2) \quad K > 1,\ 3)\ K = 1.$$

Нехай $K < 1$. Тоді для числа $q \in (K;1)$ існує $n_0 \in \mathbb{N} : n \ge n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q$.

Справді, коли б існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \ge q$, то звідси випливало б, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} \ge q$. Це неможливо, бо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = K < q$. Отже, $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \quad \forall n \ge n_0$, і тому за теоремою 6 ряд (A) є збіжним.

Нехай тепер $K > 1$. Тоді існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел, така що $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to K > 1$, коли $k \to \infty$. Тому існує таке k_0, що для всіх $k \ge k_0$ маємо $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$, звідки $a_{n_k} > 1 \quad \forall k \ge k_0$, тобто $a_n \not\to 0$, коли $n \to \infty$. Отже, у цьому випадку ряд (A) розбігається.

Так само, як і для ознаки Д'Аламбера, неважко показати, що у випадку, коли $K = 1$, ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. ◄

Отже, правильне таке твердження.

Теорема 7 (друга ознака Коші). *Нехай* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = K$, *зокрема* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = K$. *Тоді додатний ряд (A) є збіжним, коли* $K < 1$, *розбіжним – коли* $K > 1$ *(при цьому* $a_n \not\to 0$, $n \to \infty$*), і може бути або збіжним, або розбіжним, коли* $K = 1$.

Другу ознаку Коші називають ще ознакою Коші у граничній формі.

Зауважимо, що ознаками Коші зручно користуватися в тих випадках, коли неважко знайти корінь n-го степеня із загального члена.

5.2.5. Приклади

Розглянемо деякі приклади на застосування розглянутих вище ознак.

1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{10}$$

де p – фіксоване число, називають *узагальненим гармонічним рядом.*

Якщо $p \le 1$, то $\dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{n^p}$, і тому за першою ознакою порівняння дістаємо, що даний ряд розбігається, оскільки гармонічний ряд (3) є розбіжним.

Нехай $p > 1$. Тоді

$$S_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{5^p} + \dots + \frac{1}{8^p}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{16^p}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^n)^p}\right) \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{2^p} + 2 \cdot \frac{1}{2^p} + 2^2 \cdot \frac{1}{(2^2)^p} + 2^3 \cdot \frac{1}{(2^3)^p} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^p} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1} \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{\frac{1}{2^{p-1}}}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1} - 1} = H \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Враховуючи, що $\forall m \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N}_0 : 2^k \le m < 2^{k+1}$, маємо $S_m < S_{2^{k+1}} \le H$. Таким чином, при $p > 1$ послідовність (S_m) частинних сум ряду (10) є обмеженою, а отже, згідно з теоремою 1, даний ряд є збіжним.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді такої теореми.

Теорема 8 (про збіжність узагальненого гармонічного ряду). *Ряд* (10) *є розбіжним, коли* $p \le 1$, *і збіжним, коли* $p > 1$.

2. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n^3}.$$

Даний ряд є додатним. Порівняємо його з узагальненим гармонічним рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, який є збіжним, бо $p = 3$ (див. ряд (10)). Оскільки $\operatorname{tg} \dfrac{1}{n^3} > \dfrac{1}{n^3}$, то перша ознака порівняння відповіді не дає. Скористаємось другою ознакою порівняння. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3}}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}\, t}{t}=1,$$

і тому ряд є збіжним.

3. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\ \frac{n+1}{n}\right).$$

У п.5.1.2 (див. приклад 4) показано, що $\dfrac{1}{n}\ge\ln\ \dfrac{n+1}{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$. Тому даний ряд є додатним.

Крім того, за властивістю експоненти маємо $\exp x\ge 1+x\quad\forall x\in\mathbb{R}$. Тоді

$$\exp\frac{-1}{n+1}\ge 1-\frac{1}{n+1}\implies -\frac{1}{n+1}\ge\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\implies$$

$$\implies\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\ln\ \frac{n}{n+1}=-\ln\ \frac{n+1}{n}\le-\frac{1}{n+1}.$$

Отже,

$$0\le\frac{1}{n}-\ln\ \frac{n+1}{n}\le\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

У п.5.2.3 доведено, що ряд (9) є збіжним. Враховуючи тепер першу ознаку порівняння, дістаємо, що й розглядуваний ряд є збіжним.

Нехай E – сума даного ряду. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\ \frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\ \to E,\quad n\to\infty.$$

Звідси маємо

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln\ (n+1)-E=\gamma_n\ \to 0,\quad n\to\infty,$$

і тому

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+E+\ln\frac{n+1}{n}+\gamma_n=\ln n+E+\delta_n,$$

де $\delta_n = \gamma_n + \ln \dfrac{n+1}{n} \ \to 0, \ n \to \infty.$

Отже, дістали таке важливе співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + E + \delta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

де $\delta_n \to 0$, коли $n \to \infty$, а число E – так звана *стала Ейлера* $(E \approx 0,5772156649)$.

4. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n,$$

де $x > 0$ – фіксоване число, і застосуємо до нього ознаку Д'Аламбера.

Маємо

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\ x^{n+1} n^n}{n!\ (n+1)^{n+1} x^n} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{x}{e} = D,$$

коли $n \to \infty$. Звідси за другою ознакою Д'Аламбера дістаємо, що при $0 < x < e$ даний ряд є збіжним, а при $x > e$ – розбіжним.

У випадку, коли $x = e$, друга ознака Д'Аламбера не дає відповіді на питання про збіжність ряду.

Однак, враховуючи нерівність $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$, маємо

$$D_n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \ge 1,$$

і тому за першою ознакою Д'Аламбера (теорема 4) даний ряд розбігається.

5. Нехай $a \ne b$, $a > 0$ і $b > 0$. Тоді до ряду

$$a + ab + a^2 b + a^2 b^2 + \dots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \dots$$

другу ознаку Д'Аламбера застосувати не можна, бо

$$D_{2n-1} = \frac{a^n b^n}{a^n b^{n-1}} = b, \quad \text{а} \quad D_{2n} = \frac{a^{n+1} b^n}{a^n b^n} = a.$$

Першу ознаку Д'Аламбера можна застосувати тільки тоді, коли одночасно $a > 1$ і $b > 1$ або $a < 1$ і $b < 1$.

У першому випадку ряд розбігається, а в другому – збігається.

Однак, якщо до даного ряду застосуємо другу ознаку Коші, то дістанемо

$$K_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{a^n b^{n-1}} = a^{\frac{1}{2-\frac{1}{n}}} \, b^{\frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{ab}, \quad n \to \infty.$$

$$K_{2n} = \sqrt[2n]{a^n b^n} = \sqrt{ab} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{ab}, \quad n \to \infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = \sqrt{ab}.$

Тому за другою ознакою Коші маємо: якщо $ab < 1$, то даний ряд збіжний, якщо $ab > 1$, то – розбіжний, а якщо $ab = 1$, то він набирає вигляду

$$a + 1 + a + 1 + \cdots + a + 1 + \ldots,$$

і тому є розбіжним, оскільки загальний член не прямує до нуля при $n \to \infty$.

5.2.6. Історична довідка

Ознака Д'Аламбера названа на честь французького математика Ж. Д'Аламбера (1717 - 1783), який першим (хоча не зовсім точно) сформулював її.

5.2.7. Зв'язок із шкільним курсом математики

Твердження даного параграфа не знаходять безпосереднього застосування у шкільному курсі математики загальноосвітньої школи. Проте у класах з поглибленим вивченням математики та на факультативних заняттях даний матеріал можна розглядати, оскільки він має численні практичні застосування.

5.2.8. Постановка проблем

Наведемо приклад задачі, яку досить просто сформулювати, але важко розв'язати. У рівності (11), де $\delta_n \to 0$, коли $n \to \infty$, присутня стала Ейлера E. Постає питання, яким числом вона є: раціональним чи ірраціональним, алгебраїчним чи трансцендентним.

5.2.9. Контрольні запитання та завдання

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожний ряд є додатним;

2) кожний нескінченний десятковий дріб є додатним рядом;

3) якщо ряд збіжний, то послідовність його частинних сум обмежена;

4) твердження, обернене до 3), є правильним;

5) якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – довільні ряди і $a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ гарантує збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

6) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, $a_n > 0$ і $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ гарантує збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

7) якщо $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним;

8) якщо $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається;

9) якщо $a_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним;

10) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є збіжним, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжним;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$;

12) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$ є збіжним $\forall a \ge 0$.

2. Довести дані твердження.

1) Якщо $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2) Якщо $a_n > 0$ і $b_n > 0 \quad \forall n \ge n_0$ та

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ гарантує збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3) Нехай $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Тоді якщо існують $n_0 \in \mathbb{N}$ і $r > 1$ такі, що $R_n \ge r > 1 \quad \forall n \ge n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, а якщо $\exists n_0 : \ R_n \le 1 \quad \forall n \ge n_0$, то цей ряд розбігається *(ознака Раабе)*.

4) Нехай $c_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n} = +\infty$, а

$$K_n = c_n \, \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}.$$

Тоді, якщо $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ і $\delta > 0$ такі, що $K_n \ge \delta \quad \forall n \ge n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, а якщо $\exists n_0 : \ K_n \le 0 \quad \forall n \ge n_0$, то цей ряд є розбіжним *(ознака Куммера)*.

3. Дістати з ознаки Куммера (див. вправу 2.4)) ознаку Д'Аламбера $(c_n = 1)$, ознаку Раабе $(c_n = n)$ та *ознаку Бертрана* $(c_n = n \ln n, \ n \ge 2)$.

5.3. Ряди з довільними членами

Серед рядів, які не є додатними, виділяють, насамперед, так звані знакопочережні ряди, які мають цікаві властивості та широкі застосування.

5.3.1. Знакопочережні ряди. Ряд Лейбніца

Ряд вигляду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \tag{12}$$

де $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, називають *знакопочережним*. Такі ряди іноді називають *знакопереміжними* або *знакозмінними*.

Прикладами знакопочережних рядів є ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^p}$ $\forall p \in \mathbb{R}$, тоді як ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin n$ не є знакопочережним.

З необхідної умови збіжності ряду випливає, що умова $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ є необхідною і для збіжності знакопочережного ряду.

► Припустимо, що $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Знайдемо частинні суми ряду (12). Враховуючи, що $a_{2n-1} - a_{2n} \ge 0$, маємо $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \le$$

$$\le S_{2(n+1)} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2(n+1)}).$$

Отже, послідовність (S_{2n}) є монотонною.

Оскільки $a_{2k} - a_{2k+1} \ge 0 \quad \forall k$, то

$$0 \le S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1.$$

Отже, послідовність (S_{2n}) не тільки монотонна, а й обмежена. Тому вона є збіжною, тобто має скінченну границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, причому з нерівності $0 \le S_{2n} \le a_1$ випливає, що $0 \le S \le a_1$.

Розглянемо тепер послідовність (S_{2n-1}). Маємо

$$S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, а $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$, дістаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$.

Отже, послідовність (S_n) частинних сум ряду (12) є збіжною до числа $S \in [0; a_1]$, за умови, що $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ◄

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 1 (Лейбніца про збіжність знакопочережного ряду). *Якщо* $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то знакопочережний ряд* (12) *є збіжним і його сума* $S \in [0; a_1]$.

Застосуємо теорему 1 до ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \, \frac{1}{n}, \tag{13}$$

який називають *рядом Лейбніца.*

Маємо $a_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = a_{n+1} \to 0$, коли $n \to \infty$. Отже, згідно з теоремою 1, ряд Лейбніца є збіжним і його сума $S \in [0; 1]$.

Спробуємо знайти цю суму. Насамперед зауважимо, що

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \; - \; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Скориставшись тепер формулою (11) (див. п.5.2.5), дістанемо

$$S_{2n} = \ln 2n + E + \delta_{2n} - \ln n - E - \delta_n = \ln 2 + \delta_{2n} - \delta_n \to \ln 2, \quad n \to \infty.$$

Тому сума ряду Лейбніца

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2,$$

тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \, \frac{1}{n} = \ln 2.$$

► Знакопочережний ряд (12) є збіжним, якщо виконуються умови теореми 1. Тому за властивістю про збіжність ряду та його залишку будь-який залишок ряду (12) є збіжним рядом. При цьому, якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = S$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+n-1} a_{k+n} = r_n,$ то $S - S_n = r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Скориставшись тепер властивістю лінійності рядів, дістанемо

$$r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_{k+n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (-1)^n r_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_{k+n}.$$

Оскільки останній ряд є знакопочережним, то $0 \le |r_n| = (-1)^n r_n \le a_{n+1}$ і

$$|S - S_n| \le a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

тобто $S \approx S_n$, причому абсолютна похибка цієї наближеної рівності не перевищує a_{n+1}. ◄

Цим самим доведено таке твердження.

Наслідок (про абсолютну похибку наближення.) *Нехай виконано умови теореми 1 і S – сума ряду (12), а S_n– його n-та частинна сума. Тоді $S \approx S_n$, і абсолютна похибка цього наближення* $|S - S_n| \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Наприклад, якщо взяти в ряді Лейбніца n=100, то

$$S = \ln 2 \approx \sum_{k=1}^{100} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \,,$$

і абсолютна похибка цього наближення

$$\Big| \ln 2 - \sum_{k=1}^{100} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \Big| \le \frac{1}{101} < 0,01.$$

Отже, за допомогою суми $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ можна обчислити $\ln 2$ з точністю до 0,01.

5.3.2. Ряди з довільними членами. Абсолютна та умовна збіжність

Розглянемо тепер ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ з довільними членами (дійсними або комплексними). Для суми скінченної кількості доданків має місце властивість

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} z_k \Big| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \tag{14}$$

Постає питання, чи справедлива ця властивість для довільних збіжних рядів, тобто, чи має місце нерівність

$$\Big| \sum_{k=1}^{\infty} z_k \Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|, \tag{15}$$

якщо вважати, що в обох частинах нерівності (15) записано суми відповідних рядів.

Позитивну відповідь на поставлене питання неважко дістати, якщо в нерівності (14) перейти до границі при $n \to \infty$ та скористатись властивостями про перехід до границі в нерівності та під знаком модуля. Однак при цьому права частина нерівності (15) може стати рівною $+\infty$ (наприклад, коли $z_k = (-1)^{(k-1)}\ \frac{1}{k}$), і тоді нерівність (15) стає тривіальною, а саме: $|\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k\ | \le +\infty$.

Отже, для збіжного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ може бути або збіжним, або розбіжним.

Постає питання, що можна сказати про збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ є збіжним?

► Нехай ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ є збіжним і $\varepsilon > 0$ – довільне фіксоване число. Тоді, згідно з критерієм Коші збіжності ряду, існує таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \ge n_0$ маємо

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Звідси за властивістю модуля дістаємо $\forall n \ge n_0$ і $\forall p \in \mathbb{N}$

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| \le |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon,$$

тому за критерієм Коші ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ є збіжним. ◄

У зв'язку з проведеними міркуваннями можна ввести таке означення.

Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ є збіжним.

Враховуючи тепер дане означення та проведені вище міркування, дістаємо таке твердження.

Теорема 2 (про зв'язок абсолютної збіжності та збіжності). *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *є абсолютно збіжним, то він є збіжним, причому* $\Big|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\Big| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Неважко помітити, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \tag{16}$$

є абсолютно збіжним, якщо $p > 1$, бо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{1}{n^p}$$

є узагальненим гармонічним рядом (10), в якому $p > 1$ (див. теорему 8 п.5.2.5).

Якщо $0 < p \leq 1$, то ряд (16) є збіжним за теоремою Лейбніца, проте ряд (10) у цьому випадку вже є розбіжним за згаданою вище теоремою 8. Отже, ряд (16) при $0 < p \leq 1$ є збіжним, але не абсолютно.

У зв'язку з цим вводять таке означення.

Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ називають *умовно збіжним*, якщо він є збіжним, проте не є абсолютно збіжним.

Таким чином, ряд (16) умовно збігається при $0 < p \leq 1$. Зокрема, ряд Лейбніца (13) є умовно збіжним.

5.3.3. Зв'язок збіжності рядів з комплексними та з дійсними членами

► Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ з комплексними членами $z_n = x_n + iy_n$, де $x_n = \text{Re } z_n$, а $y_n = \text{Im } z_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Оскільки

$$|x_n| \leq |z_n|, \quad |y_n| \leq |z_n|, \quad |z_n| \leq |x_n| + |y_n| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то за ознакою порівняння збіжності додатних рядів дістаємо збіжність рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Якщо, крім того, використати лінійну властивість збіжних рядів, то дістанемо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, за умови збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$. ◄

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 3 (про зв'язок абсолютної збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{Re } z_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{Im } z_n$). *Для того щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ збігався абсолютно, необхідно й достатньо, щоб абсолютно збігалися ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{Re } z_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{Im } z_n$.*

Зауважимо, що для дослідження ряду на абсолютну збіжність можна використовувати відомі ознаки збіжності додатних рядів.

Враховуючи умови теореми 3, розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (8) з довільними дійсними членами.

Введемо такі позначення:

$$x_n^+ = \begin{cases} x_n, & \text{коли} \quad x_n \geq 0, \\ 0, & \text{коли} \quad x_n < 0, \end{cases} \qquad x_n^- = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x_n \geq 0, \\ -x_n, & \text{коли} \quad x_n < 0, \end{cases} \tag{17}$$

і назвемо x_n^+ і x_n^- відповідно *додатною* та *від'ємною компонентами* x_n.

► Помічаємо, що

$$x_n = x_n^+ - x_n^-, \quad \text{а} \quad |x_n| = x_n^+ + x_n^- \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

причому $0 \leq x_n^+ \leq |x_n|$ і $0 \leq x_n^- \leq |x_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Тому за ознакою порівняння дістаємо: якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ є абсолютно збіжним, то додатні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$ є збіжними і, навпаки, збіжність двох останніх рядів гарантує абсолютну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. При цьому

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- .$$

Нехай тепер ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ є умовно збіжним. Тоді, за умови збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$, мусить збігатися і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + x_n^-).$$

Останнє гарантує абсолютну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, що неможливо. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$ є розбіжним.

Аналогічно показуємо розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$.

Навпаки, розбіжність двох останніх додатних рядів гарантує розбіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^+ + x_n^-). \quad ◄$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 4 (про зв'язок абсолютної та умовної збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$). *Нехай дано збіжний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *з дійсними членами і* x_n^+ *та* x_n^- *визначено формулами* (17). *Тоді:*

1) для того щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *збігався абсолютно, необхідно й достатньо, щоб додатні ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$ *збігалися, причому*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^+ - x_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-;$$

2) для того щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *умовно збігався, необхідно й достатньо, щоб додатні ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$ *та* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$ *розбігалися до* $+\infty$.

5.3.4. Переставна властивість рядів

Відомо, що при відшуканні суми скінченної кількості доданків останні можна переставляти місцями і це не впливає на суму.

Постає питання, як вестиме себе збіжний ряд, коли його члени переставити довільним чином. Щоб відповісти на це питання, введемо спочатку таке означення.

Нехай φ – довільне фіксоване взаємно однозначне відображення множини $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, тобто $\varphi:\ \mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{N}$. Тоді ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_{\varphi(n)} \qquad (*) \qquad \text{і} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} \qquad (**)$$

називають *перестановкою (φ-ою перестановкою) рядів* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ (1) і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (8) відповідно. Наприклад, ряд

$$z_2 + z_1 + z_4 + \cdots + z_{2n} + z_{2n-1} + \cdots$$

є однією з перестановок ряду (1).

► Розглянемо спочатку додатний ряд (8) та будь-яку його перестановку (**). Нехай $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} = x_{\varphi(1)} + x_{\varphi(2)} + \cdots + x_{\varphi(k)}$ і $m_n = \max\{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)\}$.

Тоді зрозуміло, що $W_n \le x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_n} = S_{m_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Оскільки $W_n \le S_{m_n}$, то

$$W = \lim_{n\to\infty} W_n \le \lim_{n\to\infty} S_{m_n} = S.$$

З іншого боку, ряд (8) можна вважати перестановкою ряду (**), і тому, згідно з доведеним, $S \le W$. Отже, $S = W$, тобто додатний ряд (8) і будь-яка його перестановка (**) мають однакові суми.

Нехай тепер ряд (8) є абсолютно збіжним рядом з дійсними членами. Тоді за теоремою 4 додатні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$ є збіжними, причому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$. За доведеним вище $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$.

Тому й $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$, тобто абсолютно збіжний ряд з дійсними членами і будь-яка його перестановка мають однакові суми, причому перестановка також є абсолютно збіжним рядом.

Скориставшись тепер теоремою 3, дістаємо справедливість останнього твердження для абсолютно збіжних рядів з комплексними членами. ◄

Проведені міркування показують, що справедливе таке твердження.

Теорема 5 (про перестановку абсолютно збіжного ряду). *Якщо абсолютно збіжний ряд (1) має суму S, то й будь-яка його перестановка $(*)$ є абсолютно збіжним рядом з тією самою сумою S.*

Отже, в абсолютно збіжному ряді його члени можна довільно переставляти місцям, і це не впливає ні на абсолютну збіжність, ні на суму ряду.

Перевіримо тепер, чи мають аналогічну властивість умовно збіжні ряди.

► Нехай ряд (8) є умовно збіжним рядом з дійсними членами.

Позначимо $x_{n(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, – невід'ємні члени цього ряду, записавши їх у порядку зростання номерів: $n(k+1) > n(k) \; \forall k$. Аналогічно $x_{m(k)}$ – від'ємні члени даного ряду, записані в порядку зростання їхніх номерів: $m(k+1) > m(k) \quad \forall k$.

Користуючись необхідною умовою збіжності ряду, дістаємо, що $x_n \to 0$, коли $n \to \infty$, і тому $0 \le x_{n(k)} \to 0$ і $0 \ge x_{m(k)} \to 0, \quad k \to \infty$.

Позначимо $u_k = x_{n(k)}$, $v_k = x_{m(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді $0 \le u_k \to 0$, $0 > v_k \to 0$, $k \to \infty$, проте за теоремою 4 ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ є розбіжними відповідно до $+\infty$ та $-\infty$.

Візьмемо довільні фіксовані числа S^* і S^{**} такі, що $-\infty \le S^* \le S^{**} \le +\infty$, і дві послідовності (S_i^*) та (S_i^{**}), для яких $S_i^{**} \ge S_i^* \quad \forall i \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{i\to\infty} S_i^* = S^*$ і $\lim\limits_{i\to\infty} S_i^{**} = S^{**}$.

Покладемо $p(0) = q(0) = 0$ і позначимо $p(1)$ таке натуральне число, для якого $\sum\limits_{k=1}^{p} v_k > S_1^* - 1$, коли $p(0) < p < p(1)$, проте $\sum\limits_{k=1}^{p(1)} v_k \le S_1^* - 1$.

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{p} v_k \to -\infty$, $p \to \infty$, то таке число $p(1)$ знайдеться.

Позначимо $q(1)$ таке натуральне число, для якого

$$\sum_{k=1}^{p(1)} v_k + \sum_{k=1}^{q} u_k < S_1^{**} + 1,$$

коли $q(0) < q < q(1)$, проте

$$\sum_{k=1}^{p(1)} v_k + \sum_{k=1}^{q(1)} u_k \ge S_1^{**} + 1,$$

Таке число $q(1)$ існуватиме, бо $\sum\limits_{k=1}^{q} u_k \to +\infty$, $q \to \infty$.

Методом математичної індукції визначаємо послідовності $(p(i))$ та $(q(i))$ такі, що

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p(1)} v_k + \sum\limits_{k=1}^{q(1)} u_k + \cdots + \sum\limits_{k=q(i-2)+1}^{q(i-1)} u_k + \sum\limits_{k=p(i-1)+1}^{p} v_k > S_i^* - \dfrac{1}{i}, \\ \\ p(i-1) < p < p(i), \\ \\ W_i^{(1)} := \sum\limits_{k=1}^{p(1)} v_k + \sum\limits_{k=1}^{q(1)} u_k + \cdots + \sum\limits_{k=q(i-2)+1}^{q(i-1)} u_k + \sum\limits_{k=p(i-1)+1}^{p(i)} v_k \le S_i^* - \dfrac{1}{i} \end{cases} \tag{18}$$

і

$$\begin{cases} W_i^{(1)} + \sum\limits_{k=q(i-1)+1}^{q} u_k < S_i^{**} + \dfrac{1}{i}\ , \quad q(i-1) < q < q(i), \\ \\ W_i^{(2)} := W_i^{(1)} + \sum\limits_{k=q(i-1)+1}^{q(i)} u_k \ge S_i^{**} + \dfrac{1}{i}. \end{cases} \tag{19}$$

Цим самим визначено і ряд

$$v_1 + \cdots + v_{p(1)} + u_1 + \cdots + u_{q(1)} + \cdots + v_{p(i)+1} + \cdots +$$

$$+ v_{p(i+1)} + \cdots + u_{q(i)+1} + \cdots + u_{q(i+1)} + \cdots ,$$

який є деякою перестановкою ряду (8).

Нехай W_p - частинна сума побудованої перестановки. Тоді для $k(i) = p(i) + q(i-1)$ з нерівностей (18) випливає:

$$S_i^* - \frac{1}{i} + v_{p(i)} < W_{k(i)} = W_i^{(1)} \le S_i^* - \frac{1}{i}.$$

Тому $W_{k(i)} \to S^*$, $i \to \infty$, бо $S_i^* \to S^*$, $v_{p(i)} \to 0$ і $\frac{1}{i} \to 0$ при $i \to \infty$.

Далі для $m(i) = p(i) + q(i)$ з нерівностей (19) дістаємо, що

$$S_i^{**} + \frac{1}{i} \le W_{m(i)} = W_i^{(2)} < S_i^{**} + \frac{1}{i} + u_{q(i)}.$$

Тому $W_{m(i)} \to S^{**}$, $i \to \infty$, оскільки $S_i^{**} \to S^{**}$, $u_{q(i) \to 0}$, а $\frac{1}{i} \to 0$, коли $i \to \infty$.

Отже, якщо $S^* < S^{**}$, то побудована перестановка є розбіжним рядом, який не має суми.

Якщо $S^* = S^{**}$, то вважаємо, що $S_i^* = S_i^{**}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Тоді для $p \in [p(i) + q(i-1) + 1;\ p(i) + q(i)]$, враховуючи нерівності $v_n < 0$, $u_n \ge 0$, (18) і (19), маємо:

$$S_i^* - \frac{1}{i} + v_{p(1)} \le W_p \le W_{p(i)+q(i)} = W_i^{(2)} < S_i^* + \frac{1}{i} + u_{q(i)}.$$

Тому $W_p \to S^*$, коли $[p(i) + q(i-1) + 1;\ p(i) + q(i)] \ni p \to \infty$.

Так само доводимо, що $W_p \to S^*$ при $[p(i) + q(i) + 1;\ p(i+1) + q(i)] \ni p \to \infty$, а отже, $\lim\limits_{p \to \infty} W_p = S^*$.

Таким чином, якщо $S^* = S^{**}$, то побудована перестановка має своєю сумою будь-яке наперед задане число $S^* \in [-\infty; +\infty]$. Зокрема, якщо S^* – скінченне число, то перестановка є збіжним до S^* рядом, а коли $S^* = -\infty$ або $S^* = +\infty$, то ця перестановка є розбіжним рядом. ◀

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 6 (Рімана про перестановки умовно збіжного ряду). *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *з дійсними членами є умовно збіжним, то можна так* *переставити місцями його члени, що дістанемо ряд, який або не має суми, або його сума дорівнює наперед заданому числу* $S^* \in [-\infty; +\infty]$.

5.3.5. Добуток рядів та його збіжність

Для того щоб перемножити скінченні суми $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ та $\sum\limits_{k=1}^{m} y_k$, можна утворити добутки вигляду

$$\begin{array}{cccccc} x_1y_1, & x_1y_2, & x_1y_3, & \cdots, & x_1y_k, & \cdots \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\ x_2y_1, & x_2y_2, & x_2y_3, & \cdots, & x_2y_k, & \cdots \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\ x_3y_1, & x_3y_2, & x_3y_3, & \cdots, & x_3y_k, & \cdots \\ & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & , \end{array} \tag{20}$$

а потім додати їх у довільному порядку.

Узагальнимо цей факт на випадок довільних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad (A) \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad (B).$$

Утворимо з членів цих рядів всілякі добутки і запишемо їх у вигляді (20). При цьому, на відміну від сум скінченної кількості доданків, у кожному рядку (20) буде нескінченна кількість добутків і кількість самих рядків буде нескінченною. З цих добутків можна різними способами утворювати нові ряди. Якщо, наприклад, виписувати добутки за відміченими діагоналями, то дістанемо ряд

$$\begin{gathered} x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1) + \cdots + \\ +(x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1) + \cdots , \end{gathered} \tag{21}$$

який має спеціальну назву.

Добутком за Коші рядів (A) і (B) називають ряд (21), тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, де

$$z_n = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Взагалі, якщо ряди (A) і (B) є збіжними, то добуток за Коші цих рядів може бути розбіжним рядом.

Наприклад, якщо $x_n = y_n = (-1)^{n-1} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то

$$|z_n| = |x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1| =$$

$$= \Big|(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{n-3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-2}\,\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\Big)\Big|$$

$$\geq \frac{1}{n}\cdot n = 1,$$

бо

$$k(n-k+1) = -\Big(k^2 - (n+1)k + \frac{(n+1)^2}{4}\Big) + \frac{(n+1)^2}{4} =$$
$$= -\Big(k - \frac{n+1}{2}\Big)^2 + \frac{(n+1)^2}{4} \leq \frac{(n+1)^2}{4} \leq n^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n} \qquad \forall k \in [1; n].$$

Отже, ряд (21) є розбіжним, оскільки $z_n \not\to 0$, коли $n \to \infty$.

► Припустимо, що ряд (A) є абсолютно збіжним до суми X, а ряд (B) збігається до суми Y. Введемо частинні суми рядів:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \quad \text{і} \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Тоді

$$Z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1) +$$

$$\cdots + (x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + \cdots + x_ny_1) = x_1(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) +$$

$$+ x_2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + \cdots + x_ny_1 = x_1Y_n + x_2Y_{n-1} + \cdots + x_nY_1.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$, то $Y_n - Y = \alpha_n \to 0$, $n \to \infty$. Тому $Y_n = Y + \alpha_n$ $\forall n$ і

$$Z_n = x_1(Y + \alpha_n) + x_2(Y + \alpha_{n-1}) + \cdots + x_n(Y + \alpha_1) =$$

$$= YX_n + x_1\alpha_n + x_2\alpha_{n-1} + \cdots + x_n\alpha_1 = YX_n + \beta_n.$$

Покажемо, що $\beta_n = x_n\alpha_1 + x_{n-1}\alpha_2 + \cdots + x_1\alpha_n \to 0$, коли $n \to \infty$.

Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|$ є збіжним, то існує таке число $K>0$, що $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|\le K$ і $|x_n|\to 0$, коли $n\to\infty$.

Нехай $\varepsilon>0$ - довільне фіксоване число. Знайдемо $k_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $k>k_0(\varepsilon)$ маємо $|\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{2K}$, а для фіксованого числа $k_0(\varepsilon)$ знайдемо таке $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n>n_0(\varepsilon)$ дістанемо $|x_n\alpha_1+\cdots+x_{n-k_0+1}\alpha_{k_0}|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$|\beta_n|\le|x_n\alpha_1+\cdots+x_{n-k_0+1}\alpha_{k_0}|+|x_{n-k_0}\alpha_{k_0+1}+\cdots+x_1\alpha_n|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2K}(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{n-k_0}|)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad\forall n>n_0(\varepsilon).$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, і $\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=\lim\limits_{n\to\infty}(YX_n+\beta_n)=YX$, тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty}z_k=XY$.

Нехай ряди (A) і (B) збігаються абсолютно. Тоді існують такі числа $K>0$ і $H>0$, що $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|\le K$ і $\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|\le H$. Тепер маємо таку оцінку:

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k|\le|x_1|\cdot|y_1|+(|x_1|\cdot|y_2|+|x_2|\cdot|y_1|)+\cdots+$$

$$+(|x_1|\cdot|y_n|+|x_2|\cdot|y_{n-1}|+\cdots+|x_n|\cdot|y_1|)=|x_1|\sum_{k=1}^{n}|y_k|+$$

$$+|x_2|\sum_{k=1}^{n-1}|y_k|+\cdots+|x_n|\ |y_1|\le H(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\le HK.$$

Звідси випливає абсолютна збіжність ряду (21), тобто добутку за Коші рядів (A) і (B). ◄

Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 7 (про добуток за Коші числових рядів). *Нехай дано збіжні ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=X$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=Y$, *принаймні один з яких є абсолютно збіжним. Тоді добуток за Коші цих рядів є збіжним до суми* XY. *Якщо обидва ряди абсолютно збіжні, то й добуток цих рядів є абсолютно збіжним рядом.*

5.3.6. Історична довідка

Поняття абсолютної та умовної збіжності рядів увів О.Коші. Теорему про перестановки абсолютно збіжного ряду довів П.Діріхле, а теорему про перестановки умовно збіжного ряду - Б.Ріман.

5.3.6. Зв'язок із шкільним курсом математики

Уявляючи суму ряду як "суму нескінченної кількості доданків", вчитель математики повинен розуміти, що поведінка таких сум може істотно відрізнятися від поведінки суми скінченної кількості доданків. Зокрема, перестановка доданків місцями може змінювати суму; якщо згрупувати окремо додатні та від'ємні доданки, то вони вже можуть не мати скінченної суми; сума почленних добутків доданків може не існувати. Однак, якщо ряди є абсолютно збіжними, то вказані незручності зникають. Отже, абсолютно збіжні ряди близькі за властивостями до сум скінченної кількості доданків.

5.3.8. Постановка проблем

У зв'язку з розглянутим матеріалом, виникають такі питання: чи є необхідною умова монотонності членів знакопочережного ряду, взятих за модулем, у теоремі Лейбніца; які перестановки умовно збіжного ряду мають ту саму суму, що й вихідний ряд; чи може добуток за Коші двох збіжних числових рядів збігатися до суми, що не є добутком сум даних рядів?

5.3.9. Контрольні запитання та завдання

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) якщо загальний член ряду має вигляд $(-1)^{n-1}a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, то цей ряд знакопочережний;

2) твердження, обернене до 1), є привильним;

3) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1} - a_{2k})$ є збіжним, то знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ також є збіжним;

4) кожний збіжний ряд є абсолютно збіжним;

5) сума і різниця абсолютно збіжних рядів є абсолютно збіжними рядами;

6) сума і різниця умовно збіжних рядів є умовно збіжними рядами;

7) якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$ збіжні, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ є абсолютно збіжним;

8) якщо деяка перестановка ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ є абсолютно збіжною, то й сам ряд є абсолютно збіжним;

9) добуток за Коші двох збіжних рядів є збіжним рядом;

10) якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ абсолютно збігаються до своїх сум X і Y відповідно, а в ряді (21) опущено дужки, то будь-яка перестановка цього ряду є абсолютно збіжним рядом, сума якого дорівнює XY.

2. Довести дані твердження.

1) Якщо послідовність (a_n) монотонна та обмежена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, то й ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ є збіжним (*ознака Абеля*).

2) Якщо послідовність (a_n) монотонна і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а послідовність $(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k)$ обмежена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ є збіжним *(ознака Діріхле)*.

3) Якщо $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $Y_n = \sum\limits_{n=1}^{n} y_k$, $z_k = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_{k+1-i}$, $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$, то

$$C_n = \frac{1}{n}\,(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = \frac{1}{n}\,(X_1 Y_n + X_2 Y_{n-1} + \cdots + X_n Y_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

і $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = XY$, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = X$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = Y$.

5.4. Функціональні послідовності та ряди. Рівномірна збіжність

У попередньому параграфі розглядалися числові ряди. Проте в математичному аналізі важливу роль відіграють також функціональні ряди, з якими тісно пов'язані функціональні послідовності.

5.4.1. Поняття функціональної послідовності та її збіжності

Нагадаємо, що послідовність – це будь-яке відображення, визначене на множині натуральних чисел. Якщо множина значень цього відображення є числовою, то маємо числову послідовність.

Проте множина значень послідовності може бути довільною, наприклад деякою множиною числових функцій, визначених на певній множині E. У цьому випадку дістаємо так звану функціональну послідовність.

Отже, *функціональною послідовністю* називають будь-яке відображення φ множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел у множину $\{f : D(f) \supset E\}$ числових функцій, визначених на деякій множині E. При цьому $\varphi(n)$ позначають $f_n(z)$, де $z \in E$, і називають *загальним* або *n-м членом функціональної послідовності*, а саму послідовність позначають $(f_n(z))$, $z \in E$, або просто $(f_n(z))$, якщо $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$, або $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in E$, або

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \dots\ ,\ f_n(z),\ \dots\ , \quad z \in E. \tag{22}$$

Функціональна послідовність цілком визначається своїм загальним членом.

Наприклад, рівності

$$1)\ f_n(z) = z^n,\ \ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}; \qquad 2)\ f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^n},\quad x \in (-1; 1],\ \ n \in \mathbb{N};$$

$$3)\ f_n(y) = \exp(iny),\ \ y \in \mathbb{R},\ \ n \in \mathbb{N},$$

задають різні функціональні послідовності, тоді як рівність

$$f_n(x) = \frac{1}{[\,|x| + 1] - n},\ \ n \in \mathbb{N},$$

де $[\,|x| + 1]$ – ціла частина $|x| + 1$, не задає функціональної послідовності, бо не існує множини E, на якій були б визначені всі функції $f_n(x)$.

Розглянемо довільну функціональну послідовність (22). Якщо зафіксувати $z = z_0 \in E$, то дістанемо числову послідовність $(f_n(z_0))$, яка може бути або збіжною, або розбіжною.

Функціональну послідовність (22) називають *збіжною (розбіжною) в точці* $z_0 \in E$, якщо збіжною (розбіжною) є числова послідовність $(f_n(z_0))$.

Якщо функціональна послідовність (22) є збіжною в кожній точці $z \in E_1 \subset E$, то її називають *збіжною на множині* E_1. При цьому множину E_1 називають *множиною* (або *областю) збіжності* даної послідовності, якщо ця послідовність є розбіжною $\forall z \in E \setminus E_1$.

Отже, множина збіжності – це множина усіх точок, у яких функціональна послідовність є збіжною.

У випадку, коли послідовність (22) збігається на множині $E_1 \subset E$, то, зрозуміло, що вона збігається до деякої функції f. Цю функцію називають *границею* даної *функціональної послідовності* або її *граничною функцією* і записують

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \quad z \in E_1.$$

Розглянемо деякі приклади.

1. Для функціональної послідовності $\left(\dfrac{1}{x^2+n^2}\right)$ при всіх $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = 0,$$

тобто областю збіжності даної послідовості є множина $E = \mathbb{R}$, а її граничною функцією є $f(x) = 0$.

На рис.1 зображено графіки перших чотирьох членів даної послідовності та її граничної функції.

2. Функціональна послідовність (nx) збігається лише в одній точці $x_0 = 0$ $(\lim\limits_{n\to\infty} nx_0 = 0)$, бо при $x \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} nx = \infty$.

3. Для функціональної послідовності $\left(\dfrac{nx^2+1}{x^2+3n}\right)$ маємо

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2+1}{x^2+3n} = \frac{x^2}{3}.$$

Отже, дана послідовність збігається на множині $\mathbb{R}$ і її граничною функцією є $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$.

4. Функціональна послідовність $\left(\dfrac{n^2}{x^2+n}\right)$ розбігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{x^2+n} = \infty.$$

Тому областю збіжності даної послідовності є порожня множина.

5. Функціональна послідовність (z^n), $z \in \mathbb{C}$, збігається на множині $E_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, бо при цих z маємо $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.

Якщо $|z| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \infty$. Тому дана послідовність розбіжна на множині $E_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Нехай тепер $|z| = 1$ і $E_3 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. На цій множині

$$z = \cos\arg z + i\sin\arg z = \cos y + i\sin y, \quad y \in (-\pi; \pi].$$

Якщо $y = 0$, то $z = 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 1$, а коли $y = \pi$, то $z = -1$ і $z^n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, задає розбіжну послідовність.

Тому вважатимемо, що $y \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$. Для таких y маємо $z_0^n = \cos ny_0 + i \sin ny_0$. Відомо, що послідовність (z_0^n) збігається тоді й тільки тоді, коли є збіжними послідовності $(\cos ny_0)$ і $(\sin ny_0)$.

Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \cos ny_0 = a$. Тоді й $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n-1)y_0 = a$. Оскільки $\cos(n-1)y_0 = \cos ny_0 \cos y_0 + \sin ny_0 \sin y_0$, то існує також $\lim\limits_{n\to\infty} \sin ny_0 = b$ (обгрунтуйте це) і має місце рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n-1)y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \cos ny_0 \cos y_0 + \lim\limits_{n\to\infty} \sin ny_0 \sin y_0$, тобто $a = a\cos y_0 + b \sin y_0$. Тому, поклавши $a = 0$, дістанемо, що й $b = 0$. Однак

$$1 = \cos^2 ny_0 + \sin^2 ny_0 \to a^2 + b^2,\ n \to \infty,$$

тобто $a^2 + b^2 = 1$, що неможливо при $a = b = 0$. Отже, $a \neq 0$, $a^2 + b^2 = 1$ і $a = a\cos y_0 + b\sin y_0$. Тоді

$$a(1 - \cos y_0) = b \sin y_0 \Rightarrow 2a \sin^2 \frac{y_0}{2} = 2b\ \sin \frac{y_0}{2} \cos \frac{y_0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \sin \frac{y_0}{2} = b \cos \frac{y_0}{2} \Rightarrow b = a\ \mathrm{tg} \frac{y_0}{2}.$$

Враховуючи, що $a^2 + b^2 = 1$, дістаємо $a^2 + a^2 \mathrm{tg} \frac{y_0}{2} = 1$, тобто $a^2 = \cos^2 \frac{y_0}{2}$.

Нехай $a > 0$. Тоді $a = \cos^2 \frac{y_0}{2}$, $b = \sin^2 \frac{y_0}{2}$ і

$$\cos \frac{y_0}{2} = \lim_{n\to\infty} \cos(n+1)y_0 = \lim_{n\to\infty} (\cos ny_0 \cos y_0 - \sin ny_0 \sin y_0) =$$

$$= \cos \frac{y_0}{2} \cos y_0 - \sin \frac{y_0}{2} \sin y_0 = \cos \frac{3y_0}{2},$$

тобто $\cos \frac{y_0}{2} = \cos \frac{3y_0}{2}$ тоді й тільки тоді, коли $2 \sin \frac{y_0}{2} \sin y_0 = 0$, що неможливо, бо $y_0 \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$. Тому випадок $a > 0$ неможливий.

Аналогічно показуємо неможливість випадку $a < 0$.

Вище було показано, що $a \neq 0$.

Отже, припущення про збіжність послідовності $(\cos ny_0)$, де $y_0 \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$, приводить до суперечності. Тому для таких y_0 послідовність (z_0^n) є розбіжною.

Отже, функціональна послідовність (z^n) є збіжною на множині $E = E_1 \cup \{1\} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\} \cup \{1\}$ і розбіжною на множині $\mathbb{C} \setminus E$.

Зокрема, якщо $z = x \in \mathbb{R}$, то множиною збіжності послідовності (x^n) є проміжок $(-1; 1]$, а граничною функцією (рис. 2) –

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad -1 < x < 1, \\ 1, & \text{коли} \quad x = 1. \end{cases}$$

5.4.2. Рівномірна збіжність послідовності

Припустимо, що функціональна послідовність $(f_n(z))$, $z \in E$, є збіжною на множині $E_1 \subset E$. Тоді для будь-якого $z \in E_1$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) =: f(z)$ і $|f_n(z) - f(z)| \to 0$, коли $n \to \infty$, тобто вираз $|f_n(z) - f(z)|$ є як завгодно малим, коли номер n достатньо великий. Однак при цьому величина n, взагалі кажучи, залежить від z. У випадку, коли n не залежить від z, можна стверджувати, що малим є вираз $r_n = \sup\limits_{E_1} |f_n(z) - f(z)|$.

Проведені міркування приводять до нового виду збіжності послідовності.

Функціональну послідовність $(f_n(z))$, $z \in E$, називають *рівномірно збіжною до функції* f *на множині* $E_1 \subset E$, якщо $r_n = \sup\limits_{E_1} |f_n(z) - f(z)| \to 0$, коли $n \to \infty$. При цьому записують $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ на E_1.

Суть рівномірної збіжності полягає в тому, що $f_n(z) \approx f(z)$, і абсолютна похибка цього наближення є як завгодно малою для всіх досить великих n одночасно для всіх $z \in E_1$.

Розглянемо функціональну послідовність (z^n), $z \in \mathbb{C}$. У п. 5.4.1 показано, що вона є збіжною тоді й тільки тоді, коли $|z| < 1$ або $z = 1$. При цьому

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad |z| < 1, \\ 1, & \text{коли} \quad z = 1. \end{cases}$$

Однак, якщо $E = \{z : \ |z| < 1\} \cup \{1\}$, то

$$r_n = \sup_E |z^n - f(z)| = \sup_{|z|<1} |z^n| = 1 \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

Тому на множині E послідовність (z^n) є збіжною, проте не є рівномірно збіжною.

Візьмемо тепер множину $K_q = \{z : \ |z| \le q\}$, де число $q \in (0; 1)$ є фіксованим. Тоді

$$r_n = \sup_{K_q} |z^n - 0| = q^n \to 0, \quad n \to \infty,$$

тобто $z^n \rightrightarrows 0$ на множині K_q.

5.4.3. Поняття функціонального ряду та його збіжності

Нехай задано функціональну послідовність $(f_n(z))$, $z \in E \neq \emptyset$. *Функціональним рядом* називають вираз

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots =: \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in E. \tag{23}$$

При цьому $f_n(z)$ називають *n-м або загальним членом функціонального ряду*. Якщо $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$, то позначення $z \in E$ можна опускати.

Наприклад, вирази

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1},\ z \in \mathbb{C}, \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n},\ x \in (-1;1], \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \exp(iny),\ y \in \mathbb{R},$$

є функціональними рядами, тоді як вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\,|z|+1] - n}$$

не є функціональним рядом, оскільки $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n) = \emptyset$. Функціональний ряд (23) називають *збіжним (абсолютно збіжним) у точці* $z_0 \in E$, якщо таким є числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$, а коли ряд (23) збіжний (абсолютно збіжний) в кожній точці множини $E_1 \subset E$, то його називають *збіжним (абсолютно збіжним) на множині* E_1. В іншому разі ряд (23) називають *розбіжним* відповідно в точці $z_0 \in E$ або на множині $E_1 \subset E$. Якщо функціональний ряд збіжний, проте не абсолютно, то його називають *умовно збіжним* у відповідній точці або на множині. Так само, як і для числових рядів, суму $F_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ називають *n-ою частинною сумою ряду* (23).

Зрозуміло, що ряд (23) є збіжним у точці z (на множині E_1) тоді й тільки тоді, коли функціональна послідовність $(F_n(z))$ частинних сум цього ряду є збіжною в точці z (на множині E_1). При цьому, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(z) = F(z)$, то записують $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = F(z)$, і функцію $F(z)$ називають *сумою* даного ряду.

Функціональний ряд (23) називають *рівномірно збіжним на множині* $E_1 \subset E$ до функції $F(z)$, якщо послідовність $(F_n(z))$ рівномірно збігається до функції $F(z)$ на множині E_1.

Розглянемо функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{24}$$

Він є геометричним для будь-якого фіксованого $z \in \mathbb{C}$ і тому збігається тоді й тільки тоді, коли $|z| < 1$, тобто в крузі $K = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, причому його сума $F(z) = \dfrac{1}{1-z} \quad \forall z \in K$.

Визначимо, чи є даний ряд рівномірно збіжним на множині K. Маємо

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} = \frac{1-z^n}{1-z},$$

$$|F_n(z) - F(z)| = \left|\frac{1-z^n}{1-z} - \frac{1}{1-z}\right| = \frac{|z|^n}{|1-z|} \quad \forall z \in K \ \text{ і } \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки число $z \in K$ можна вибирати як завгодно близьким до 1, то

$$r_n = \sup_K |\ F_n(z) - F(z)\ | = \sup_K \ \frac{|z|^n}{|1-z|} = +\infty \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, в крузі K ряд (24) збігається до суми $F(z) = \dfrac{1}{1-z}$, проте не рівномірно.

Пропонуємо читачеві показати, що в крузі $K_q = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < q\} \ \ \forall q \in (0;1)$ даний ряд збігається рівномірно.

5.4.4. Властивість неперервності граничної функції та суми ряду

Виявляється, що рівномірно збіжні функціональні послідовності та ряди володіють властивостями, яких не мають функціональні послідовності та ряди, що збігаються нерівномірно.

Так, гранична функція послідовності, розглянутої у прикладі 5 (п. 5.4.1), є розривною функцією, тоді як члени $f_n(x) = x^n$ даної послідовності є неперервними функціями на проміжку (-1;1] (див. рис.2).

Чи можливо таке для функціональної послідовності $(f_n(z))$, яка збігається до функції $f(z)$ нерівномірно на множині E?

▶ Нехай $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ на множині E і кожна функція $f_n(z)$ неперервна в точці $z_0 \in E$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall z \in E$

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_0) + f_n(z_0) - f(z_0)| \leq$$

$$\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \leq$$

$$\leq 2 \sup_E \, |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)|.$$

Оскільки послідовність $(f_n(z))$ рівномірно збігається до $f(z)$ на множині E, то вважаючи $\varepsilon > 0$ довільним фіксованим числом, знайдемо таке $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$ маємо $\sup\limits_E |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тому $|f(z) - f(z_0)| \leq$

$$\leq 2 \sup_E (|f_{n_0}(z) - f(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)|) < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)|.$$

Враховуючи неперервність функції $f_{n_0}(z)$ в точці $z_0 \in E$, дістаємо, що для заданого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon)$, що для всіх $z \in O_\delta(z_0) \cap E$ маємо $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Отже, $\forall z \in O_\delta(z_0) \cap E_1$

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Остання нерівність означає неперервність функції f в точці $z_0 \in E$. ◀

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 1 (про неперервність граничної функції). *Нехай функціональна послідовність* $(f_n(z))$ *рівномірно збігається до функції* $f(z)$ *на множині* E.

Тоді, якщо кожна з функцій f_n *неперервна в точці* $z_0 \in E$ *(на множині* E*), то й гранична функція* f *є неперервною в цій точці (на множині* E*).*

Простим наслідком теореми 1 є таке твердження.

Теорема 2 (про неперервність суми функціонального ряду) .*Нехай функціональний ряд (23) рівномірно збігається на множині* E_1 *до своєї суми* $F(z)$.

Тоді, якщо кожна функція f_n є неперервною в точці $z_0 \in E_1$ (на множині E), то й функція F неперервна в цій точці (на множині E).

Пропонуємо читачеві самостійно довести теорему 2.

5.4.5. Критерій збіжності функціональної послідовності та ряду

Теореми 1 і 2 показують, що поняття рівномірної збіжності функціональної послідовності та функціонального ряду є дуже важливими. Тому бажано було б мати якусь просту ознаку їх рівномірної збіжності.

► Насамперед зауважимо, що коли $F_n(z) \rightrightarrows F(z)$ на множині E, то $r_n = \sup\limits_E |F_n(z) - F(z)| \to 0,\ n \to \infty,$ тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) : \Big(n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |r_n - 0| = r_n < \frac{\varepsilon}{2} \Big).$$

Отже, якщо $m \geq n \geq n_0$, то

$$|F_m(z) - F_n(z)| = |F_m(z) - F(z) + F(z) - F_n(z)| \leq$$

$$\leq |F_m(z) - F(z)| + |F_n(z) - F(z)| \leq r_m + r_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall z \in E.$$

Нехай навпаки

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) : (m \geq n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |F_m(z) - F_n(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in E).$$

Тоді для довільного фіксованого $z \in E$, згідно з критерієм Коші збіжності послідовності, існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(z) = F(z).$. Враховуючи це, перейдемо до границі при $m \to \infty$ в нерівності $|F_m(z) - F_n(z)| < \varepsilon$, яка є правильною $\forall m \geq n \geq n_0$ і $\forall z \in E$. Тоді дістанемо

$$|F_m(z) - F_n(z)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \text{ і } \ \forall z \in E \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\; r_n = \sup_E |F(z) - F_n(z)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \Longrightarrow F_n(z) \rightrightarrows F(z)$$

на множині E. ◄

Цим самим доведено таке твердження.

Теорема 3 (критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності). *Функціональна послідовність* $F_n(z)$ *збігається рівномірно до функції* $F(z)$ *на множині* E *тоді й тільки тоді, коли для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує таке число* $n_0(\varepsilon)$, *що з умови* $m \geq n \geq n_0(\varepsilon)$ *випливає нерівність* $|F_m(z) - F_n(z)| \leq \varepsilon \quad \forall z \in E$.

Якщо цей критерій застосувати до функціонального ряду (23), з частинними сумами $F_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$, то дістанемо, що

$$|F_m(z) - F_n(z)| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)|,$$

коли $m = n + p > n \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Тому теорема 3 набирає такого вигляду.

Теорема 4 (критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду). *Функціональний ряд (23) рівномірно збігається на множині* E *тоді й тільки тоді, коли для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує таке число* $n_0(\varepsilon)$, *що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$ *виконується нерівність*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \ \ і \ \ \forall z \in E.$$

5.4.6. Ознака Вейєрштраса

Теорема 4 дає змогу довести достатню умову абсолютної і рівномірної збіжності функціонального ряду.

Теорема 5 (ознака Вейєрштраса абсолютної і рівномірної збіжності функціонального ряду). *Нехай* $|f_n(z)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *і додатний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *є збіжним. Тоді функціональний ряд (23) є абсолютно і рівномірно збіжним на множині* E.

▶ Абсолютна збіжність ряду (23) на множині E випливає з нерівності $|f_n(z)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall z \in E$ (згідно з ознакою порівняння збіжності додатних рядів).

Якщо $\varepsilon > 0$ - довільне число, то за критерієм Коші збіжності числових рядів знайдеться таке $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+p}| = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

Отже,

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \cdots + |f_{n+p}(z)| <$$

$$< a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,\ \forall p \in \mathbb{N} \ \text{ і } \ \forall z \in E.$$

Звідси за критерієм Коші дістаємо рівномірну збіжність даного функціонального ряду на множині E.

Зауважимо, що ряд (23) з теореми 5 називають *мажорованим*, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – його *мажорантою.* ◀

Приклад. Розглянемо ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Оскільки $\displaystyle\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in \mathbb{R}$, а ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний, то даний функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Зауважимо, що між абсолютною та рівномірною збіжністю функціонального ряду не існує прямої залежності.

Функціональний ряд може збігатися абсолютно, проте нерівномірно на деякій множині (наприклад, функціональний ряд (24) на множині $K = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$).

Навпаки, функціональний ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{|z|+n}$ на всій комплексній площині збігається рівномірно, проте неабсолютно.

Справді, для будь-якого фіксованого z даний ряд є знакопочережним. Тому за наслідком з теореми Лейбніца маємо

$$|F(z) - F_n(z)| \leq \frac{1}{|z|+n+1} \leq \frac{1}{n+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r_n = \sup_{\mathbb{C}} |F(z) - F_n(z)| \leq \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty,$$

тобто даний ряд рівномірно збігається до функції F на множині $\mathbb{C}$.

Проте ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{|z|+n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z|+n}$$

розбігається за ознакою порівняння $\forall z \in \mathbb{C}$.

Отже, заданий ряд є умовно збіжним на множині $\mathbb{C}$.

5.4.7. Історична довідка

О.Коші не володів поняттям рівномірної збіжності і помилково вважав, що сума довільного збіжного функціонального ряду з неперервними членами також є неперервною функцією.

Поняття рівномірної збіжності ввели англійський математик Д. Стокс (1819 – 1903) та німецький математик Ф.Зейдель (1821 – 1896). Широке застосування цього поняття знайшов К. Вейєрштрас, якому належить достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду (теорема 5).

5.4.8. Зв'язок із шкільним курсом математики

Матеріал даного параграфа безпосередньо не пов'язаний з шкільним курсом математики, проте він відіграє важливу роль у формуванні переконання, що аналогії не завжди приводять до правильних тверджень, тоді як твердження, правильність яких на перший погляд очевидна, насправді можуть виявитися хибними.

Наприклад, сума будь-якої скінченної кількості неперервних функцій є неперервною функцією. Природно чекати, що й "сума нескінченної кількості неперервних функцій", якщо вона існує, також є неперервною функцією. Насправді, це не так.

5.4.8. Постановка проблем

Теорема 3 дає тільки достатню умову неперервності суми функціонального ряду. Тому виникає проблема відшукання необхідних і достатніх умов неперервності суми функціонального ряду.

5.4.9. Контрольні запитання та завдання

1. Перевірити, чи правильні дані твердження:

1) кожний числовий ряд є функціональним;

2) кожна числова послідовність є функціональною послідовністю;

3) функціональна послідовність - це довільне відображення множини натуральних чисел у деяку множину числових функцій;

4) функціональний ряд повністю визначається своїм загальним членом або послідовністю своїх частинних сум;

5) кожна функціональна послідовність є збіжною принаймні в одній точці;

6) якщо функціональна послідовність є рівномірно збіжною на множині E, то вона збіжна на E.

7) твердження, обернене до 6), є правильним;

8) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно збігається до функції F на множині E, то $f_n(z) \rightrightarrows 0$ на E ;

9) твердження, обернене до 8) є правильним;

10) якщо $|f_{n+1}(z) - f_n(z)| \leq \dfrac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall z \in E$, то існує $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ $\forall z \in E$ і f – неперервна функція на множині E;

11) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| = 0$ $\forall p \in \mathbb{N}$ і $\forall z \in E$, то функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ є рівномірно збіжним на E.

12) якщо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно збігається на множині E, то існує додатний збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такий, що $|f_n(z)| \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall z \in E$.

2. Довести дані твердження.

1) Якщо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ рівномірно збігається до функції $B(x)$ на множині E, а послідовність $(a_n(x))$ є монотонною $\forall x \in E$ і $|a_n(x)| \leq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in E$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ є рівномірно збіжним на E (*ознака Абеля*).

2) Якщо $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)| \leq B$ $\forall x \in E$ і $\forall n \in \mathbb{N}$, а послідовність $(a_n(x))$ є монотонною $\forall x \in E$ і $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на E, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ є рівномірно збіжним на E (*ознака Діріхле*).

3) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in E$ і $f_n(x)$ - неперервні функції в точці x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$. Тоді для того щоб функція f була неперервною в точці x_0, необхідно й достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ знайшлося б таке $\delta(\varepsilon, n) > 0$, щоб з умови $x \in O^*_\delta(x_0) \cap E$ випливала нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

5.5. Степеневі ряди

Розглянемо важливий клас функціональних рядів - степеневі ряди, які є важливим апаратом дослідження функцій, зокрема, за їх допомогою можна обчислювати наближені значення функцій, що є сумами цих рядів.

5.5.1. Поняття степеневого ряду. Теорема Коші-Адамара

Степеневим рядом називають ряд вигляду

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{25}$$

де z_0 - задане число (дійсне або уявне), a_n $\forall n \in \mathbb{N}$ - задані дійсні або комплексні числа, які називають *коефіцієнтами степеневого ряду* (25).

Зрозуміло, що кожний степеневий ряд повністю визначається своїми коефіцієнтами a_n та числом z_0.

Прикладами степеневих рядів є такі функціональні ряди:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n, \quad \text{де } a_n = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ і } \ z_0 = 0,$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{2n}, \quad \text{де } a_0 = 0, \quad a_{2n} = n, \quad a_{2n-1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ і } \ z_0 = 0,$$

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{де } a_n = \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ і } \ z_0 = 0.$$

Функціональний ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+z^n}{1-z^n}$ не є степеневим рядом.

Спочатку з'ясуємо питання про збіжність степеневого ряду.

Неважко помітити, що коли $z = z_0$, то всі члени ряду (25) стають нулями, крім, можливо, a_0. Тому будь-який степеневий ряд (25) збігається в точці z_0.

Нехай тепер $z \neq z_0$ – довільне фіксоване число. Розглянемо додатний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n||z-z_0|^n$ і застосуємо до нього ознаку збіжності Коші. Маємо

$$k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |z-z_0| \cdot \lambda,$$

$$\text{де } \lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Стосовно λ можливими є такі випадки:

$$1)\ \lambda = 0, \quad 2)\ \lambda = +\infty, \quad 3)\ 0 < \lambda < +\infty.$$

У випадку 1) маємо

$$k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = 0 < 1,$$

і за ознакою Коші ряд (25) абсолютно збігається для всіх $z \in \mathbb{C}$.

Для випадку 2) дістаємо $k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = +\infty > 1 \ \ \forall z \neq z_0$, і отже, за ознакою Коші даний ряд є розбіжним $\forall z \neq z_0$.

Нарешті, у випадку 3) з ознаки Коші дістаємо, що

$$k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \cdot \lambda < 1 \iff |z-z_0| < \frac{1}{\lambda},$$

а

$$k = |z-z_0| \cdot \lambda > 1 \iff |z-z_0| > \frac{1}{\lambda}.$$

Тому ряд (25) абсолютно збігається на множині $K = \{z: \ |z-z_0| < \frac{1}{\lambda}\}$, яка є кругом з центром у точці z_0 і радіусом $R = \frac{1}{\lambda}$, а зовні цього круга ряд розбігається. ◀

Вважаючи, що при $\lambda = 0$ маємо $R = \dfrac{1}{\lambda} = +\infty$ і круг $K = \mathbb{C}$, а при $\lambda = +\infty$ $R = \dfrac{1}{\lambda} = 0$ і круг $K = \{z_0\}$, дістаємо, що для кожного степеневого ряду (25) можна вказати круг K з центром у точці z_0 і радіусом $R \in [0; +\infty]$, в якому цей ряд збігається абсолютно, а зовні якого - розбігається.

Такий круг K називають *кругом збіжності степеневого ряду* (25), його радіус R - *радіусом збіжності* цього *ряду*, а коло $\Gamma = \{z : |z-z_0| = R\}$, коли $0 < R < +\infty$, називають *колом збіжності ряду* (25). У точках кола збіжності Γ ряд може вести себе по-різному (це вимагає проведення додаткових досліджень).

Проведені міркування доводять справедливість такого твердження.

Теорема 1 (Коші – Адамара про круг збіжності степеневого ряду). *Будь-який степеневий ряд* (25) *має круг збіжності* K *з центром у точці* z_0 *і радіусом* $R = \dfrac{1}{\lambda}$, *де* $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, *в якому ряд збігається абсолютно, а зовні якого – розбігається.*

Формулу

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{26}$$

називають *формулою Коші – Адамара.*

Отже, питання про збіжність і абсолютну збіжність степеневого ряду (25) можна розв'язувати за допомогою теореми Коші – Адамара. Однак досить часто можна обійтися і без неї.

Нехай $z \neq z_0$ - довільне фіксоване число і $a_n \neq 0 \quad \forall n$, причому існує $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D \leq +\infty$. Тоді до додатного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ можна застосувати ознаку Д'Аламбера:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}|}{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow |z-z_0| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Для таких z ряд (25) є збіжним.

Аналогічно дістаємо, що коли $|z-z_0| > \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то для таких z ряд (25) є розбіжним.

Тому радіус збіжності ряду (25) можна визначати за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{27}$$

якщо остання границя існує (скінченна або нескінченна).

5.5.2. Проміжок збіжності степеневого ряду з дійсними членами

Якщо у степеневому ряді (25) $z = x$, $z_0 = x_0$ і a_n $\forall n$– дійсні числа, то маємо ряд з дійсними членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \qquad (25^*)$$

У цьому випадку круг K вироджується в інтервал $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, який називають *інтервалом збіжності* ряду (25^*) з дійсниими членами. Проте і в цьому випадку вказаний інтервал можна називати кругом збіжності з центром у точці x_0 і радіусом R (це так званий круг у просторі $\mathbb{R}^1$).

Щодо точок, які є кінцями інтервалу збіжності, то в них ряд може вести себе по-різному (може збігатися абсолютно, умовно або взагалі розбігатись). Тому областю (множиною) збіжності ряду (25^*) є проміжок, який може відрізнятися від області абсолютної збіжності цього ряду не більш ніж двома точками, що є кінцями інтервалу збіжності.

Отже, маємо такий алгоритм дослідження на збіжність ряду (25^*) :

1) визначити радіус збіжності R за однією з формул (26) або (27);
2) записати інтервал збіжності $(x_0 - R;\ x_0 + R)$;
3) дослідити поведінку ряду в точках $x = x_0 - R$ і $x = x_0 + R$;
4) записати проміжок збіжності.

5.5.3. Приклади

1. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\ z^n,$$

який, зрозуміло, збігається в точці $z = z_0 = 0$. Нехай $z \neq 0$ - довільна фіксована точка. Тоді до додатного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |n!\ z^n|$ можна застосувати ознаку Д'Аламбера :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|\ (n+1)!\ z^{n+1}\ |}{|\ n!\ z^n\ |} = n!\ |z| \to +\infty > 1, \quad n \to \infty,$$

і тому $b_n \not\to 0$, $\quad n \to \infty$, тобто заданий ряд є розбіжним у довільній точці $z \neq 0$. Отже, круг збіжності даного степеневого ряду $K = \{0\}$, а радіус збіжності $R = 0$.

2. До степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n}$$

зручно застосувати теорему Коші – Адамара.

Оскільки $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Отже, радіус збіжності даного ряду $R = \dfrac{1}{\lambda} = 1$, а круг збіжності $K = \{z : |z+1| < 1\}$.

Якщо на цей ряд дивитися як на ряд з дійсними членами, то $K = (-2;\ 0)$ – інтервал збіжності цього ряду, причому, коли $z = -2$, то дістаємо збіжний (за теоремою Лейбніца) ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, а коли $z = 0$, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний гармонічний ряд.

Отже, на колі збіжності степеневий ряд може збігатися в одних точках і розбігатися в інших.

3. Для дослідження на збіжність ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$$

з дійсними членами скористаємося запропонованим вище алгоритмом.

Маємо:

1) радіус збіжності ряду визначаємо за формулою (27), звідки

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = 1;$$

2) інтервал збіжності $K = \{x :\ |x-2| < 1\} = (1;\ 3)$;

3) якщо $x = 1$, то дістаємо знакочережний ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$, який збігається, причому абсолютно. При $x = 3$ маємо додатний ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, який також є абсолютно збіжним ;

4) проміжком збіжності (абсолютної) даного ряду є відрізок $[1;\ 3]$.

4. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}.$$

Радіус збіжності цього ряду визначимо за формулою (26) :

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\dfrac{1}{4^k}}} = 2$$

(тут границі послідовності $\left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)$ не існує, оскільки $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, а $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \sqrt[2k]{\dfrac{1}{4^k}} \to \dfrac{1}{2}, \quad k \to \infty$. Однак верхня границя розглядуваної послідовності завжди існує, і в нашому випадку дорівнює $\dfrac{1}{2}$.)

Тоді круг збіжності даного ряду $|z| < 2$.

5.5.4. Властивості степеневих рядів

У п.п. 3.3.4 і 3.3.5 розглядалися формули:

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

у правих частинах яких записано степеневі ряди, збіжні у всій комплексній площині, тобто радіуси збіжності цих рядів $R = \infty$.

Відомо, що суми останніх трьох рядів є неперервними функціями в $\mathbb{C}$.

У зв'язку з цим виникає питання, чи є сума довільного степеневого ряду неперервною функцією в крузі збіжності цього ряду.

Відповідь на поставлене питання можна було б дістати за допомогою теореми 2 про неперервність суми функціонального ряду (п. 5.4.4.). Однак для цього треба знати, де саме степеневий ряд збігається рівномірно.

Наприклад, розглянутий у п. 5.4.3 ряд (24) має круг збіжності $K = \{z : |z| < 1\}$, проте в цьому крузі даний ряд збігається нерівномірно, тоді як він рівномірно збігається у кожному крузі $K = \{z : \ |z| < q\} \quad \forall q \in (0;\ 1)$.

Тому виникає гіпотеза про правильність такого твердження.

Теорема 2 (про рівномірну збіжність степеневого ряду). *Якщо степеневий ряд (25) має додатний рвдіус збіжності* R, *то для всіх* $r \in (0; R)$ *даний ряд рівномірно збігаєтъся в крузі* $K_r = \{z : |z - z_0| < r\}$.

► Нехай $r \in (0; R)$ – довільне фіксоване число, а точку z^* вибрано так, що $|z^* - z_0| = r < R$. Тоді $z^* \in K$, де K – круг збіжності степеневого ряду (25), і тому цей ряд абсолютно збігається в точці z^*. Отже, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |z^* - z_0|^n$ є додатним збіжним рядом, причому $|a_n(z - z_0)^n| = |a_n||z - z_0|^n < |a_n||z^* - z_0|^n$ $\forall z \in K_r$ і $\forall n \in \mathbb{N}$. Звідси за ознакою Вейєрштрасса абсолютної та рівномірної збіжності функціонального ряду дістаємо рівномірну збіжність ряду (25) в крузі K_r. ◄

Тепер вже неважко розв'зати питання про неперервність суми степеневого ряду.

► Нехай z_1 – довільна фіксована точка з круга K збіжності ряду (25). Тоді $0 < |z_1 - z_0| < R$, де R– радіус збіжності цього ряду, і тому існує таке число $r > 0$, що $|z_1 - z_0| < r < R$. За теоремою 2 даний степеневий ряд рівномірно збігається в крузі $K_r = \{z : |z - z_0| < r\}$. Члени цього ряду є неперервними функціями в крузі K_r. Тоді за властивістю неперервності суми $f(z)$ функціонального ряду (теорема 2, п.5.4.4) сума степеневого ряду (25) є неперервною функцією в крузі K_r. Оскільки точка $z_1 \in K_r$, то функція f неперервна в ній. Враховуючи те, що z_1 є довільною точкою з круга K, дістаємо неперервність f в крузі K . ◄

Отже, доведено таке твердження.

Теорема 3 (про неперервність суми степеневого ряду). *Сума* $f(z)$ *степеневого ряду (25) є неперервною функцією в крузі збіжності цього ряду, якщо його радіус збіжності* $R > 0$.

Нарешті розглянемо дві теореми Абеля, які зручно використовувати на пракутиці.

Теорема 4 (перша теорема Абеля). *Якщо степеневий ряд (25) збігається в точці* $z_1 \neq z_0$, *то він абсолютно збігається при всіх* z, *для яких* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. *Якщо ж ряд (25) розбігається в точці* z_1, *то він розбігається при всіх* z, *для яких* $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

► Якщо степеневий ряд (25) збігається в точці $z_1 \neq z_0$, то за теоремою Коші – Адамара точка z_1 належить або кругові K збіжності даного ряду, або його колу збіжності. Отже, $|z - z_0| \leq R$, де R – радіус збіжності ряду (25). Звідси випливає, що кожна точка z, для якої $|z - z_0| < |z_1 - z_0| \leq R$, задовольняє нерівність $|z - z_0| < R$. Тому $z \in K$, і за теоремою Коші –

Адамара даний ряд абсолютно збігається в точці z.

Другу частину теореми пропонуємо читачеві довести самостійно. ◀

Теорема 5 (друга теорема Абеля). *Нехай степеневий ряд* (25) *має радіус збіжності* R, *де* $0 < R < +\infty$, *і збігається в точці* $z^* = z_0 + R\exp i\varphi_0$, *що належить колу збіжності цього ряду. Тоді для суми* $f(z)$ *даного ряду, визначеної в його крузі збіжності* K, *має місце рівність*

$$\lim_{z_r \to z^*} f(z) = \lim_{z_r \to z^*} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_r - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^* - z_0)^n, \tag{28}$$

де $K \ni z_r = z_0 + r\exp i\varphi_0 \to z^*$ в тому розумінні, що $r \to R-$.

▶ Розглянемо значення

$$f(z_r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_r - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 + r\exp i\varphi - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp in\varphi_0 \cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \exp in\varphi_0 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = F(x),$$

де $b_n = a_n R^n \exp in\varphi_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, а $x = \frac{r}{R} \in (0;1)$, коли $0 < r < R$. Зрозуміло, що $K \ni z_r = z_0 + z\exp i\varphi_0 \to z^*$ в тому розумінні, що $r \to R-$ тоді й тільки тоді, коли $x \to 1-$.

При цьому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z^* - z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Отже, для доведення рівності (28) треба довести рівність

$$\lim_{x \to 1-} F(x) = \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \tag{28*}$$

за умови, що степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ є збіжним на відрізку [0; 1].

Нехай $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} B_n = B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ є сумою степеневого ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ в точці $x = 1$.

Неважко помітити, що $b_k = B_k - B_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ і $b_0 = B_0$. Тому

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = B_0 + \sum_{k=0}^{n} (B_k - B_{k-1}) x^k =$$

$$= B_0 + B_1 x - B_0 x + B_2 x^2 - B_1 x^2 + B_3 x^3 - B_2 x^3 + \cdots + B_n x^n - B_{n-1} x^n =$$

$$B_0(1-x)+B_1x(1-x)+B_2x^2(1-x)+\cdots+B_{n-1}x^{n-1}(1-x)+B_nx^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}B_kx^k(1-x)+B_nx^n.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}B_nx^n=0\quad\forall x\in(0;1)$, то

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k=\lim_{n\to\infty}\Bigl(\sum_{k=0}^{n-1}B_kx^k(1-x)+B_nx^n\Bigr)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^k(1-x)\qquad\forall x\in(0;1).$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k=F(x)=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^k\quad\forall x\in(0;1).\tag{29}$$

Звідси, зокрема, дістаємо, що коли $b_0=1$, $b_k=0\ \ \forall k\in\mathbb{N}$, то $B_k=1$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$ і

$$1=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}x^k\quad\forall x\in(0;1).\tag{29*}$$

З рівностей (29) і (29*) маємо

$$F(x)-B=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^k-(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}Bx^k=(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(B_k-B)x^k=$$

$$=(1-x)\sum_{k=0}^{k_0}(B_k-B)x^k+(1-x)\sum_{k=k_0+1}^{\infty}(B_k-B)x^k\quad\forall x\in(0;1).$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$ і $\varepsilon>0$ – довільне фіксоване число, знайдемо номер $k_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $k>k_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|B_k-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді для другого доданку правої частини останньої рівності матимемо

$$\Bigl|\,(1-x)\sum_{k=k_0+1}^{\infty}(B_k-B)\,x^k\,\Bigr|<\frac{\varepsilon}{2}\,(1-x)\sum_{k=k_0+1}^{\infty}x^k<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Для знайденого номера $k_0 = k(\varepsilon)$ перший доданок правої частини останньої рівності прямує до нуля, коли $x \to 1-$, і тому існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що

$$1 - \delta(\varepsilon) < x < 1 \Longrightarrow \left| (1-x) \sum_{k=0}^{k_0} (B_k - B)\, x^k \right| < \varepsilon.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$1 - \delta(\varepsilon) < x < 1 \Longrightarrow |F(x) - B| \leq$$

$$\leq \left| (1-x) \sum_{k=0}^{k_0} (B_k - B)\, x^k \right| + \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (B_k - B)\, x^k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

і тому

$$\lim_{x \to 1-} F(x) = B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

тобто рівність (28^*), а разом з нею і теорему 5 доведено. ◄

5.5.6. Історична довідка

Степеневі ряди вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ax^n$ (геометричний ряд) розглядали ще древньогрецькі математики, зокрема, Архімед.

Європейські вчені XIV століття вміли знаходити суму степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ для окремих значень $x \in (0;1)$.

Великий вклад у розвиток теорії степеневих рядів зробив І.Ньютон, який, зокрема, довів рівності $\exp x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ і $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

О.Коші першим визначив, де степеневий ряд збігається абсолютно, а де розбігається.

Норвезький математик Н.Абель (1802 – 1829) першим дослідив поведінку степеневого ряду на колі збіжності.

5.5.7. Зв'язок із шкільним курсом математики

Вчителю математики корисно знати, що основні елементарні функції можна розглядати як суми деяких степеневих рядів. Відповідні ряди для експоненти, синуса та косинуса вже вказані.

Подання функції у вигляді суми степеневого ряду дає змогу обчислювати значення цієї функції з довільною точністю. Особливо зручно робити це за допомогою комп'ютера. Вчитель повинен розуміти, як саме можна це робити та як складаються математичні таблиці значень функцій.

5.5.8. Постановка проблем

Основною проблемою, яка виникає при розгляді матеріалу цього параграфа, є проблема подання будь-якої елементарної функції у вигляді суми деякого степеневого ряду.

5.5.9. Контрольні запитання та завдання

1. Визначити, чи правильні дані твердження:

1) кожний степеневий ряд є функціональним рядом;

2) кожний функціональний ряд є степеневим;

3) кожний степеневий ряд є збіжним принаймні в одній точці;

4) круг збіжності степеневого ряду – це будь-який круг, в якому цей ряд збігається абсолютно;

5) якщо точка z не належить кругові збіжності деякого степеневого ряду, то даний ряд розбігається в цій точці

6) твердження, обернене до 5), є правильним;

7) степеневий ряд збігається в своєму крузі збіжності рівномірно і абсолютно;

8) круг збіжності можна визначити тільки за допомогою теореми Коші – Адамара;

9) на своєму колі збіжності степеневий ряд може: а) скрізь розбігатися, б) збігатися в одних точках і розбігатися в інших, в) збігатися абсолютно в одних точках і умовно – в інших;

10) якщо степеневий ряд абсолютно збігається в деякій точці свого кола збіжності, то він є рівномірно збіжним у своєму крузі збіжності;

11) якщо в точці z_1 степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ не є абсолютно збіжним,

то він є розбіжним $\forall z : |z - z_0| \geq |z_1 - z_0|$;

12) якщо $\lim\limits_{x \to 1-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$;

13) $\lim\limits_{x \to 1-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{2}$;

14) степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ є збіжним на відрізку $[0; 1]$.

2. Довести дані твердження.

1) Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ і $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ в крузі $K = \{z : |z - z_0| < R\}$, де $R > 0$, та існує послідовність (z_n) така, що $z_0 \neq z_n \to z_0$, $n \to \infty$, і $f(z_n) = \varphi(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тоді $f(z) = \varphi(z)$ $\forall z \in K$.

2) Якщо K – круг збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, який не вироджується в точку z_0, а $f(z)$ – сума даного степеневого ряду, то

$$f^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0)\ (z - z_0)^n \quad \forall z \in K.$$

3) $\forall z : |z| < 1$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n,$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n.$$

Рисунки

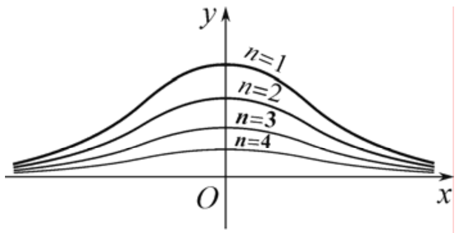

Рис. 1

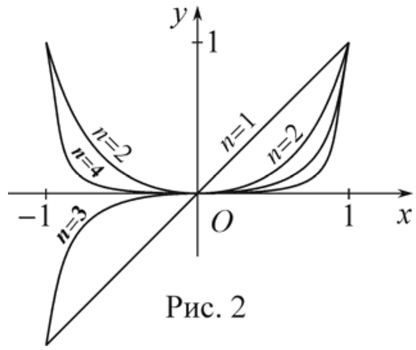

Рис. 2

Література

1. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1990.
2. *Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н.* Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973.
3. *Дюженкова Л. І., Носаль Т. В.* Вища математика. Практикум. – К.: Вища школа, 1991.
4. *Доброхотова М. А., Сафонов А. Н., Цветков А. Т.* Задачник-практикум по математическому анализу. Ряды. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1967.
5. *Михалін Г. О., Дюженкова Л. І.* Границя і неперервність функції. – К.: видавництво УДПУ імені М. П. Драгоманова, 1997.
6. *Уваренков И. М., Маллер М. З.* Курс математического анализа. Том 2. – М.: Просвещение, 1967.
7. Ряди. Методичні вказівки для написання семестрової самостійної роботи з математичного аналізу (укладач – *Дюженкова Л. І.*). – К.: УДПУ, 1994.
8. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз. Ч. 2. – К.: Вища школа, 1995.

Зміст