Міністерство освіти і науки України
Сумський державний педагогічний університет
ім. А.С. Макаренка

Збірник конкурсних завдань II етапу Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих педагогічних навчальних закладів 2005 – 2007 рр.

Методичні рекомендації

Суми
2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
З 41

Збірник задач схвалено журі II етапу Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед вищих педагогічних навчальних закладів

Рекомендовано до друку рішенням редакційно-видавничої ради Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка

Укладачі: ***Лиман Ф.М.*** – доктор фізико-математичних наук, професор, ректор Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка;

Лукашова Т.Д. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка;

Погребний В.Д. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка

Рецензент: Розуменко А.М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Сумського національного аграрного університету

З 41 Лиман Ф.М. та інші. Збірник конкурсних завдань II етапу Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих педагогічних навчальних закладів 2005–2007 рр.: Методичні рекомендації. – Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2008. – 40 с.

Збірник містить завдання II етапу Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих педагогічних навчальних закладів за 2005–2007 роки. Усі завдання супроводжуються детальними розв’язками та коментарями.

Збірник призначений для студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів. Він буде корисним учителям математики та учням, які цікавляться математикою.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ЗМІСТ

ВСТУП

Протягом останніх десятиліть широке розповсюдження як одна з форм активізації наукової творчості студентів отримали студентські олімпіади з математики. Завдання, що пропонуються на таких олімпіадах носять нестандартний характер і потребують від студента не лише ґрунтовних знань програмного матеріалу, а й винахідливості та творчого підходу. Як правило, вони ілюструють у спрощеній формі ту чи іншу глибоку математичну ідею.

Водночас до цих пір фактично відсутні більш-менш повні та загальнодоступні збірники задач, які пропонувалися в останні роки на студентських олімпіадах різних рівнів.

Даний посібник в деякій мірі покликаний виправити цю ситуацію та містить задачі другого етапу Всеукраїнської олімпіади з математики серед студентів вищих педагогічних навчальних закладів, що проводились у 2005–2007 на базі Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка. Усі задачі супроводжуються детальними розв’язками та коментарями.

До збірника увійшли задачі, запропоновані організаторами та членами журі вказаної олімпіади: професором ***Лиманом Ф.М.,*** професором ***Працьовитим М.В.,*** доцентами: ***Власенко В.Ф., Лукашовою Т.Д., Погребним В.Д., Рабець К.В., Розуменко А.О., Чашечниковою О.С., Ясінським В.А., Ячменьовим В.О.***

Автори сподіваються, що даний посібник буде корисним широкому колу читачів, що цікавляться математичними доведеннями та несподіваними ідеями, в першу чергу студентам різних вищих навчальних закладів, аспірантам, викладачам, вчителям шкіл і, навіть, школярам, які захоплюються математикою.

КОНКУРСНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

2005 рік

1. *Задано 2 концентричних кола радіусів a та b, причому $a > b$. З центра кіл проведено промінь. Через точку перетину променя з колом меншого радіуса проведено горизонталь, а через точку перетину з колом більшого радіуса – вертикаль. Проведені горизонталь і вертикаль перетинаються в точці* $\mathrm{P}(\alpha)$. *Яке геометричне місце точок утворюють всі точки* $\mathrm{P}(\alpha)$*? Відповідь обґрунтувати.*

Розв'язання

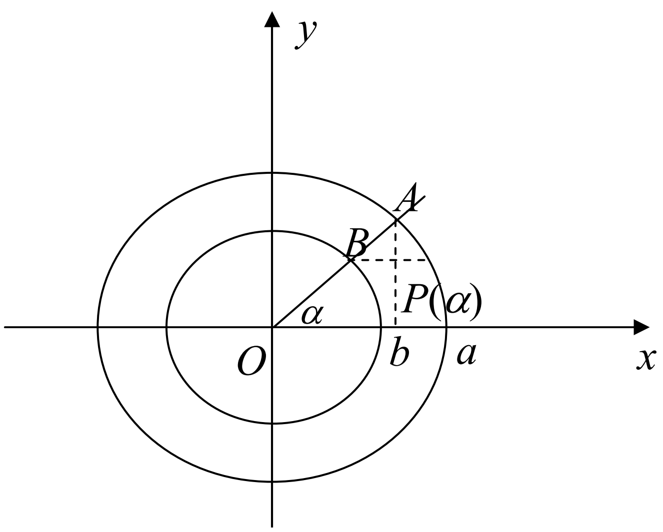

Рис. 1

Нехай маємо 2 концентричних кола вказаних радіусів зі спільним центром O. Введемо прямокутну Декартові систему координат так, щоб центр кола збігався з початком координат. Горизонтальним будемо вважати напрямок, паралельний осі Ox, вертикальним – паралельний осі Oy.

Довільний промінь, проведений з точки O, однозначно визначається кутом α з додатнім напрямком вісі Ox.

Позначимо точки перетину променя, що утворює кут α з віссю Ox, з колами (O; a) та (O; b) через A і B відповідно. Тоді A ($a\cos\alpha$; $a\sin\alpha$), B ($b\cos\alpha$; $b\sin\alpha$) і $P(\alpha)$ = ($a\cos\alpha$; $b\sin\alpha$). Отже, геометричне місце точок $P(\alpha)$ можна записати у вигляді: $\begin{cases} x = a\cos\alpha, \\ y = b\sin\alpha, \end{cases}$ де $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Оскільки $\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\alpha, \\ \dfrac{y}{b} = \sin\alpha, \end{cases}$ то $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – рівняння еліпса.}$$

Відповідь: геометричне місце точок $P(\alpha)$ – еліпс, рівняння якого має вигляд $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

2. *Нехай A – довільна квадратна матриця порядку n, I – квадратна матриця порядку n, всі елементи якої дорівнюють* 1. *Довести, що визначник матриці A + I дорівнює визначнику матриці A тоді і тільки тоді, коли сума алгебраїчних доповнень всіх елементів матриці A дорівнює* 0. *Чи буде правильним твердження, якщо елементи матриці I – довільні рівні між собою дійсні числа?*

Розв'язання

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – матриці, задані в умові. Тоді визначник матриці $A + I$ має вигляд:

$$|A+I| = \begin{vmatrix} (a_{11}+1) & (a_{12}+1) & \dots & (a_{1n}+1) \\ (a_{21}+1) & (a_{22}+1) & \dots & (a_{2n}+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1}+1) & (a_{n2}+1) & \dots & (a_{nn}+1) \end{vmatrix}.$$

Використовуючи властивості визначників, його можна подати як суму двох визначників:

$$|A+I| = \begin{vmatrix} a_{11} & (a_{12}+1) & \dots & (a_{1n}+1) \\ a_{21} & (a_{22}+1) & \dots & (a_{2n}+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & (a_{n2}+1) & \dots & (a_{nn}+1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & (a_{12}+1) & \dots & (a_{1n}+1) \\ 1 & (a_{22}+1) & \dots & (a_{2n}+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (a_{n2}+1) & \dots & (a_{nn}+1) \end{vmatrix}.$$

Перетворимо тепер другий визначник суми, віднімаючи від кожного стовпця, починаючи з другого, перший стовпець. Перший визначник, як і вище, розкладемо у суму двох визначників:

$$|A+I| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (a_{1n}+1) \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (a_{2n}+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}+1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & (a_{1n}+1) \\ a_{21} & 1 & \dots & (a_{2n}+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & 1 & \dots & (a_{nn}+1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес, через скінченне число кроків одержимо:

$$|A+I| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що перший визначник суми збігається з визначником матриці A. Розкладемо тепер кожен визначник утвореної суми, починаючи з другого, за тим стовпцем, в якому стоять одиниці. Очевидно, що

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}, \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{2j}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_{nj},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Отже, $|A+I| = |A| + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}$ і тому $|A+I| = |A|$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = 0$.

Аналогічно, якщо матриця $I = \begin{pmatrix} r & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots \\ r & \dots & r \end{pmatrix}$, то

$$|A+I| = \begin{vmatrix} (a_{11}+r) & (a_{12}+r) & \dots & (a_{1n}+r) \\ (a_{21}+r) & (a_{22}+r) & \dots & (a_{2n}+r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1}+r) & (a_{n2}+r) & \dots & (a_{nn}+r) \end{vmatrix} = |A| + r\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \cdot$$

Отже, і у цьому випадку $|A+I| = |A|$ тоді і тільки тоді, коли $r = 0$ або $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} = 0$.

Відповідь: твердження задачі доведено.

3. *Знайти найбільший спільний дільник многочленів* $f(x) = x^n - 1$, $g(x) = x^m - 1$. *При яких необхідних і достатніх умовах* $f(x)$ *ділиться на* $g(x)$ *без остачі?*

Розв'язання

Зрозуміло, що найбільшим спільним дільником $f(x)$ та $g(x)$ є многочлен, коренями якого є всі спільні корені вказаних многочленів і тільки вони. Отож, дана задача зводиться до відшукання спільних коренів многочленів $f(x)$ та $g(x)$.

Очевидно, коренями многочлена $f(x)$ є всі корені n-го степеня з одиниці: $\{\varepsilon_j^n,\ j = 0, 1, \dots, n-1\}$. Аналогічно, коренями $g(x)$ будуть усі корені m-го степеня з одиниці, тобто числа виду $\{\varepsilon_i^m,\ i = 0, 1, \dots, m-1\}$. Окрім того, $f(x) = \prod\limits_{j=0}^{n-1}(x - \varepsilon_j^n)$ та $g(x) = \prod\limits_{i=0}^{m-1}(x - \varepsilon_i^m)$.

Позначимо $d = НСД\ (m, n)$. Тоді $m = dm_1$, $n = dn_1$, де $(n_1, m_1) = 1$.

Дослідимо тепер, при яких i та j корені многочленів $f(x)$ та $g(x)$ збігаються, тобто $\varepsilon_j^n = \varepsilon_i^m$, $\quad (j = 0 \div n-1,\ i = 0 \div m-1)$.

Зрозуміло, такі числа мають задовольняти співвідношення $\frac{\pi j}{n} = \frac{\pi i}{m}$, тобто $mj = ni$ або $dm_1 j = dn_1 i$, $m_1 j = n_1 i$. Остання рівність виконується, якщо $j = i = 0$; $i = m_1$, $j = n_1$; $i = 2m_1$, $j = 2n_1$;…, $i = (d-1)m_1$, $j = (d-1)n_1$. Усі інші значення j та i перевищуватимуть $(m-1)$ та $(n-1)$.

Отже, спільними коренями даних многочленів будуть числа $\varepsilon_j^n = \varepsilon_i^m$ такі, що $\begin{cases} i = tm_1, \\ j = tn_1, \end{cases}$ де $0 \le t < (d-1)$. Їх кількість, очевидно, дорівнює d і тому $НСД\ (x^m - 1, x^n - 1) = \prod_{t=0}^{d-1} (x - \varepsilon_{n_1 t}^n) = (x^d - 1)$. Зокрема, при $d = 1$ $НСД\ (x^m - 1, x^n - 1) = x - 1$.

З двох останніх рівностей випливає також, що $(x^n - 1) \vdots (x^m - 1)$ тоді і тільки тоді, коли $НСД(x^m - 1, x^n - 1) = x^m - 1$, тобто при $НСД$ $(m, n) = m$. А це означає, що $n \vdots m$.

Відповідь: 1) $НСД(x^m - 1, x^n - 1) = (x^d - 1)$, де $d = НСД\ (m, n)$.

2) $f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow n \vdots m$.

4. *Довести, що ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + c_{n+1}}{n\, c_n}$ *розбіжний для довільної додатної обмеженої послідовності* (c_n). *Чи правильним буде твердження для довільної додатної послідовності* (c_n)? *Відповідь обґрунтувати.*

Розв'язання

1) Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + c_{n+1}}{n\, c_n}$ розбіжний для довільної обмеженої додатної послідовності (c_n).

Нехай $0 < c_n < M$, $\forall\ n \in N$. Тоді $\frac{1}{c_n} > \frac{1}{M}$, $\frac{1 + c_{n+1}}{nc_n} > \frac{1}{nM}$, $\forall\ n \in N$ і за теоремою порівняння даний ряд розбіжний, оскільки розбіжним є гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2) Покажемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+c_{n+1}}{n\cdot c_n}$ розбіжний для довільної додатної послідовності (c_n).

Спочатку доведемо розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+c_{n+1}}{c_n}$ для довільної додатної послідовності (c_n). Якщо припустити збіжність цього ряду для деякої додатної послідовності (c_n), то тоді будуть збіжними ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$, звідки $\alpha_n=\frac{1}{c_n}\to 0$ $(n\to\infty)$, $\beta_n=\frac{c_{n+1}}{c_n}\to 0$ $(n\to\infty)$ (за необхідною умовою збіжності). Тоді $c_n=\frac{1}{\alpha_n}\to\infty$ $(n\to\infty)$, $\frac{c_{n+1}}{c_n}<1$ для $\forall\ n\geq n_0>1$, тобто послідовність (c_n), починаючи з номера n_0 монотонно спадна і, будучи додатною, має границю, що суперечить її необмеженості. Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+c_{n+1}}{c_n} \qquad (1)$$

розбіжний для довільної додатної послідовності (c_n). З його розбіжності випливає розбіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+c_{n+1}}{s_n c_n}, \qquad (2)$$

де (s_n) – послідовність частинних сум ряду (1).

За допомогою нерівності Коші знаходимо, що

$$s_n=\frac{1+c_2}{c_1}+\frac{1+c_3}{c_2}+\ldots+\frac{1+c_{n+1}}{c_n}\geq$$
$$\geq n\sqrt[n]{\frac{1}{c_1}\left(1+\frac{1}{c_2}\right)\left(1+\frac{1}{c_3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{c_n}\right)(1+c_{n+1})}>n\sqrt[n]{\frac{1}{c_1}}>\frac{1}{2}n,$$

$\forall\ n\geq n_0$, оскільки $\sqrt[n]{c_1}\to 1$ $(n\to\infty)$.

Тоді $\frac{1+c_{n+1}}{n\,c_n}>\frac{1+c_{n+1}}{2s_n c_n}$, $\forall\ n\geq n_0$, звідки за теоремою порівняння випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+c_{n+1}}{n c_n}$.

Відповідь: твердження задачі доведено.

5. *Обчислити* $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2005} x}{\sin^{2005} x + \cos^{2005} x} dx$.

Розв'язання

Покладемо $x = \frac{\pi}{2} - t$. Тоді даний інтеграл можна подати у вигляді:

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2005} x}{\sin^{2005} x + \cos^{2005} x} dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^{2005} t}{\cos^{2005} t + \sin^{2005} t} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2005} x}{\sin^{2005} x + \cos^{2005} x} dx = I_1 .$$

Враховуючи, що $I = I_1$, одержимо $I = \frac{I + I_1}{2}$ або

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2005} x + \cos^{2005} x}{\sin^{2005} x + \cos^{2005} x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

6. *Знайти функцію* $f(u)$, *якщо* $\sin \int\limits_0^x f(u) du = \frac{x}{x+1}$. *Результат перевірити.*

Розв'язання

Продиференціюємо обидві частини вихідної рівності по змінній x:

$$\left(\sin \int\limits_0^x f(u) du \right)' = \left(\frac{x}{x+1} \right)'.$$

Одержимо: $f(x)\cos\int\limits_0^x f(u)du = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, звідки

$$f^2(x)\cos^2\int\limits_0^x f(u)du = \frac{1}{(x+1)^4} \qquad (3).$$

Помножимо тепер обидві частини вихідної рівності на $f\,(x)$ та піднесемо її до квадрату:

$$f^2(x)\sin^2\int\limits_0^x f(u)du = f^2(x)\frac{x^2}{(x+1)^2} \qquad (4).$$

Додаючи рівності (3) та (4) почленно, будемо мати:

$$f^2(x) = \frac{1}{(x+1)^4} + \frac{x^2}{(x+1)^2}f^2(x), \text{ звідки}$$

$$f^2(x)\left(1 - \frac{x^2}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{(x+1)^4} \quad \text{і} \quad f^2(x) = \frac{1}{(x+1)^2(2x+1)}.$$

Отже, $f(x) = \pm\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$.

Перевіримо, чи задовольняють знайдені функції умову задачі.

Нехай $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$. Тоді

$$\int\limits_0^x \frac{1}{(u+1)\sqrt{2u+1}}du = \arcsin\frac{u}{u+1}\bigg|_0^x = \arcsin\frac{x}{x+1}$$

і за умови $-1 \le \dfrac{x}{x+1} \le 1$, тобто $x \ge -\dfrac{1}{2}$, $\sin\int\limits_0^x \dfrac{1}{(u+1)\sqrt{2u+1}}du = \dfrac{x}{x+1}$.

Якщо $f(x) = -\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$, то $\sin\int\limits_0^x \dfrac{-1}{(u+1)\sqrt{2u+1}}du = -\dfrac{x}{x+1}$, що не задовольняє умови задачі.

Відповідь: $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$, де $x \ge -1$.

КОНКУРСНІ ЗАВДАННЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

2005 рік

1. *Довести, що в коло, координати центра якого у прямокутній декартовій системі координат – ірраціональні числа, не можна вписати многокутник, координати вершин якого – раціональні числа.*

Розв'язання

Припустимо супротивне. Нехай у коло, координати центра якого у прямокутній декартовій системі координат є ірраціональними числами, можна вписати многокутник, координати вершин якого в цій же системі координат є раціональними числами. Тоді на колі знайдеться принаймні три точки A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2) та A_3 (x_3, y_3) з раціональними координатами, $x_i, y_i \in Q$, $i = 1, 2, 3$.

Оскільки точки A_1, A_2, A_3 належать колу, вони мають задовольняти його рівняння:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

де $(a; b)$ – координати центра кола, R – його радіус.

Підставляючи в рівняння кола координати точок A_1, A_2, A_3, будемо мати:

$$\begin{cases} x_1^2-2ax_1+a^2+y_1^2-2by_1+b^2=R^2, \\ x_2^2-2ax_2+a^2+y_2^2-2by_2+b^2=R^2, \\ x_3^2-2ax_3+a^2+y_3^2-2by_3+b^2=R^2. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння друге і третє, одержимо:

$$\begin{cases} x_1^2-x_2^2+2a(x_2-x_1)+y_1^2-y_2^2+2b(y_2-y_1)=0, \\ x_1^2-x_3^2+2a(x_3-x_1)+y_1^2-y_3^2+2b(y_3-y_1)=0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 2a(x_2-x_1)+2b(y_2-y_1)=x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2, \\ 2a(x_3-x_1)+2b(y_3-y_1)=x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_1^2. \end{cases}$$

Остання система є лінійною відносно a та b і має раціональні коефіцієнти та вільні члени. Окрім того, вона визначена, тобто має єдиний розв'язок (a; b), оскільки три точки кола однозначно визначають його центр і радіус. Враховуючи, що

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 & 2(y_2 - y_1) \\ x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \end{vmatrix}} \in Q \text{ і } b = \frac{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ 2(x_3 - x_1) & x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \end{vmatrix}} \in Q,$$

робимо висновок, що центр даного кола повинен мати раціональні координати, що суперечить умові задачі. Тому припущення невірне і в коло, координати центра якого є ірраціональними числами, неможливо вписати многокутник, який в тій же системі координат має раціональні координати вершин.

Відповідь: твердження задачі доведено.

2. *Довести, що рівняння* $x^2 + y^2 = z^3$ *має безліч розв'язків у множині натуральних чисел.*

Розв'язання

Покладемо $x = y = 2^{3n+1}$, де $n \in N$. Підставивши ці значення у вихідне рівняння, будемо мати:

$$\left(2^{3n+1}\right)^2 + \left(2^{3n+1}\right)^2 = z^3,$$

$$2^{6n+2} + 2^{6n+2} = z^3,$$

звідки $$2^{6n+3} = z^3 \text{ і } z = 2^{2n+1}.$$

Отже, розв'язками даного рівняння є трійки чисел (2^{3n+1}; 2^{3n+1}; 2^{2n+1}), де $n \in N$. Враховуючи, що n – довільне натуральне число, таких трійок буде безліч, тому дане рівняння має нескінченне число розв'язків у множині натуральних чисел.

Відповідь: твердження задачі доведено.

3. *Довести нескінченність множини натуральних чисел, які не можуть бути дискримінантами квадратних рівнянь з цілими коефіцієнтами.*

Розв'язання

Нехай $D = b^2 - 4ac$ – дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, $c \in Z$. Проаналізуємо, які остачі може давати число D при діленні на 4. Оскільки квадрати цілих чисел при діленні на 4 можуть давати лише остачі 0 або 1 і $4ac \,\vdots\, 4$, то $D = b^2 - 4ac$ при діленні на 4 також даватиме лише дві остачі: 0 і 1. Отже, $D = 4k$ або $D = 4k + 1$, $k \in Z$. Це означає також, що числа виду $(4k + 2)$ та $(4k + 3)$, $k \in Z$ не можуть бути дискримінантами квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами.

Відповідь: твердження задачі доведено.

4. *Якщо в трикутнику з вершинами кута, утвореного нерівними сторонами, проведено бісектрису і медіану, то медіана довша, ніж бісектриса. Довести це.*

Розв'язання

Нехай в трикутнику ABC проведено медіану BM і бісектрису BH (рис. 2). Враховуючи, що за умовою трикутник різносторонній, для визначеності будемо вважати $AB < BC$.

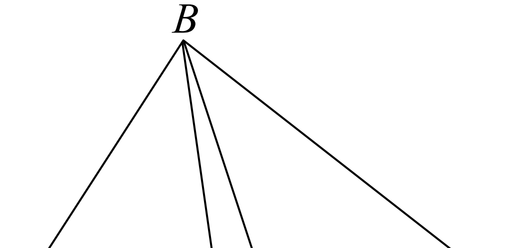

Рис. 2

За властивістю бісектриси трикутника $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BC}{HC}$, звідки $AH < HC$. Отже, $AH < \dfrac{1}{2}AC = AM$ і точка H лежить між A і M. Тому $\angle BMA < \angle BHA$.

З трикутника ABH за теоремою синусів маємо

$$\frac{BH}{\sin\angle A}=\frac{AB}{\sin\angle A} \qquad (5).$$

Аналогічно, з трикутника ABM

$$\frac{BM}{\sin\angle A}=\frac{AB}{\sin\angle A} \qquad (6).$$

Оскільки $\angle BMA < \angle BHA$, то $\sin\angle BMA < \sin\angle BHA$. Отже, враховуючи (5) та (6), $\frac{BH}{\sin\angle A}<\frac{BM}{\sin\angle A}$. Це означає, що $BH < BM$, що й треба було довести.

Відповідь: твердження задачі доведено.

5. *Знайти непарне натуральне число n, для якого при будь-якому парному k кожне з чисел нескінченної послідовності* $k^k+1, k^{k^k}+1, k^{k^{k^k}}+1, \ldots$ *не ділиться на n.*

Розв'язання

Оскільки за умовою число k парне, то кожен член даної послідовності можна подати у вигляді $(k^{2m}+1)$, $m \in N$. Враховуючи тепер, що при діленні на 3 квадрати цілих чисел дають в остачі 0 або 1, число $k^{2m}+1=(k^m)^2+1$ при діленні на 3 буде давати в остачі або 1, або 2. Отже, жоден член даної послідовності не ділиться на 3.

Відповідь: $n = 3$.

6. *Знайти максимально можливу кількість точок перетину діагоналей опуклого n-кутника.*

Розв'язання

Зрозуміло, що кількість точок перетину діагоналей опуклого n-кутника буде максимальною тоді і тільки тоді, коли ніякі три діагоналі не перетинатимуться в одній точці. З опуклості n-кутника випливає, що кожній точці перетину двох діагоналей відповідатиме чотири вершини n-кутника і навпаки. Отже, максимальна кількість точок перетину діагоналей n-кутника збігається з кількістю усіх можливих чотирикутників, які можна виділити у даному n-кутнику, тобто дорівнює $C_n^4 = \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Відповідь: максимальна кількість точок перетину діагоналей опуклого n-кутника дорівнює $C_n^4 = \frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$, $n \geq 4$.

КОНКУРСНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

2006 рік

1. *Нехай A – матриця 4×2 з дійсними елементами, а B – матриця 2×4 з дійсними елементами такі, що* $AB = \begin{pmatrix} n & 0 & -n & 0 \\ 0 & n & 0 & -n \\ -n & 0 & n & 0 \\ 0 & -n & 0 & n \end{pmatrix}$, *$n \in N$. Знайти BA.*

Розв'язання

Запишемо матриці A та B у вигляді блоків розміру 2×2:

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$, де A_1, A_2, B_1, B_2 – матриці другого порядку.

Оскільки $AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & -n & 0 \\ 0 & n & 0 & -n \\ -n & 0 & n & 0 \\ 0 & -n & 0 & n \end{pmatrix}$,

то $A_1B_1 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$, $A_2B_1 = \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}$, $A_1B_2 = \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}$, $A_2B_2 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$.

Отже, $A_1B_1 = A_2B_2 = nE$, $A_1B_2 = A_2B_1 = -nE$ і тому $B_1A_1 = B_2A_2 = nE$.

З іншого боку, $BA = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = B_1A_1 + B_2A_2 = 2nE = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$.

Відповідь: $BA = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$.

2. *Дослідити на збіжність послідовність з загальним членом $x_n = \{\sqrt{n}\}$, $n \in N$, де $\{\sqrt{n}\}$ – дробова частина числа $\sqrt{n}$.*

Розв'язання

Виділимо у даній послідовності (x_n) наступні підпослідовності: $\left(x_{k^2}\right)=\left(\{\sqrt{k^2}\}\right)$та $\left(x_{k^2-1}\right)=\left(\{\sqrt{k^2-1}\}\right)$, де $k \in N$ і доведемо, що вони мають різні границі.

У першому випадку: оскільки $\sqrt{k^2}=k$, то $\{\sqrt{k^2}\}=\{k\}=0$. Отже, послідовність $\left(x_{k^2}\right)$ збіжна до нуля.

Нехай тепер $x_n = x_{k^2-1}=\{\sqrt{k^2-1}\}$. Тоді $\{\sqrt{k^2-1}\}=\sqrt{k^2-1}-[\sqrt{k^2-1}]$. Покажемо, що $[\sqrt{k^2-1}]=k-1$. Справді, оскільки

$(k-1)^2=k^2-2k+1\le k^2-1<k^2$, то $k-1\le\sqrt{k^2-1}<k$, звідки

$[\sqrt{k^2-1}]=k-1$. Тому $\{\sqrt{k^2-1}\}=\sqrt{k^2-1}-[k^2-1]=\sqrt{k^2-1}-k+1=\dfrac{(k^2-1)-(k-1)^2}{\sqrt{k^2-1}+(k-1)}=$

$=\dfrac{2(k-1)}{\sqrt{k^2-1}+(k-1)}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}}+1}$ і $\lim\limits_{k\to\infty}\{\sqrt{k^2-1}\}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}}+1}=1$ для $k \in N$.

Отже, послідовність $\left(\{\sqrt{k^2-1}\}\right)=\left(x_{k^2-1}\right)$ є збіжною до 1. Це означає, що послідовність (x_n) розбіжна.

Відповідь: послідовність розбіжна.

3. *Знайти границю:* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n(1+2005x+e^{-2006x})dx.$

Розв'язання

Оцінимо значення підінтегральної функції при $x \in [0;\ 1]$. Очевидно, що

$$0\le x^n(1+2005x+e^{-2006x})\le x^n\cdot 2007,$$

тому $0 \le \int\limits_0^1 x^n (1+2005x+e^{-2006x})dx \le \int\limits_0^1 2007x^n dx = 2007\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{2007}{n+1}$.

Переходячи до границі, одержимо:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^n (1+2005x+e^{-2006x})dx \le \lim_{n\to\infty} \frac{2007}{n+1} = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^n (1+2005x+e^{-2006x})dx = 0$.

Відповідь: границя дорівнює нулю.

4. *Довести, що для многочлена* $P(n) = a_{2006}n^{2006} + \ldots + a_1 n + a_0$ *з натуральними коефіцієнтами існує* $n_0 \in N$ *таке, що* $P(n_0)$ *не є простим числом.*

Розв'язання

Запишемо многочлен $P(n)$ у вигляді:

$$P(n) = a_{2006}(n^{2006} - 1) + \ldots + a_1(n-1) + a_{2006} + a_{2005} + \ldots + a_1 + a_0.$$

Враховуючи, що перші 2006 доданків діляться на $(n-1)$, $P(n)$ можна подати у вигляді:

$$P(n) = (n-1)S(n) + a, \quad \text{де} \quad a = \sum_{i=0}^{2006} a_i .$$

Покладемо $n = a + 1$. Тоді $P(a+1) = aS(a+1) + a = a(S(a+1) + 1)$. Враховуючи, що $a > 1$ і $S(a+1) + 1 > 1$, число $P(a+1)$ є складеним.

Відповідь: $n_0 = a + 1$.

5. *Графік функції* $y = x^{2006} + a_1 x^{2005} + \ldots + a_{2006}$ *перетинає пряму* $y = a$ *в точках* $A_1, A_2, \ldots, A_{2006}$, *а пряму* $y = b$ *в точках* $B_1, B_2, \ldots, B_{2006}$. *Прямі* A_iB_i, $i=1\div 2006$ *утворюють з віссю OX кути* α_i. *Знайти* $\sum\limits_{i=1}^{2006} ctg\alpha_i$.

Розв'язання

Позначимо $x_1, x_2, \ldots, x_{2006}$ абсциси точок $A_1, A_2, \ldots, A_{2006}$ та $z_1, z_2, \ldots, z_{2006}$ – абсциси точок $B_1, B_2, \ldots, B_{2006}$ відповідно. Тоді числа x_i ($i = 1 \div 2006$) є коренями рівняння $x^{2006} + a_1 x^{2005} + \ldots + a_{2006} = a$, а z_i ($i = 1 \div 2006$) – коренями рівняння $x^{2006} + a_1 x^{2005} + \ldots + a_{2006} = b$ відповідно.

Оскільки $ctg\alpha_i = \dfrac{z_i - x_i}{b-a}$, то $\sum\limits_{i=1}^{2006} ctg\alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{2006} \dfrac{z_i - x_i}{b-a} = \dfrac{1}{b-a}\left(\sum\limits_{i=1}^{2006} z_i - \sum\limits_{i=1}^{2006} x_i\right)$.

За теоремою Вієта $\sum\limits_{i=1}^{2006} z_i = \sum\limits_{i=1}^{2006} x_i = -a_1$, тому $\sum\limits_{i=1}^{2006} ctg\alpha_i = 0$.

Відповідь: $\sum\limits_{i=1}^{2006} ctg\alpha_i = 0$.

6. *Нехай P – довільне поле. Взаємно однозначне відображення φ множини P на себе називається автоморфізмом поля $(P; +; \cdot)$, якщо для будь-яких двох елементів $a \in P$, $b \in P$ виконуються умови:*

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,

2) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Послідовне виконання двох автоморфізмів φ і ψ (спочатку φ, а потім ψ) назвемо їх добутком $\varphi\psi$, а множину всіх автоморфізмів поля $(P; +; \cdot)$ позначимо $Aut\ P$.

1) Довести, що $(Aut\ P; \cdot)$ – група.

2) Знайти групу всіх автоморфізмів поля Q раціональних чисел.

3) Знайти групу всіх автоморфізмів поля R дійсних чисел.

Розв'язання

1) Перевіримо умови групи.

Нехай φ і ψ – довільні автоморфізми поля P. Тоді для $\forall\ a, b \in P$

$$\varphi\psi(a+b) = \psi(\varphi(a+b)) = \psi(\varphi(a)) + \psi(\varphi(b)) = \varphi\psi(a) + \varphi\psi(b)$$

$$\varphi\psi(ab) = \psi(\varphi(ab)) = \psi(\varphi(a)\varphi(b)) = \psi(\varphi(a))\psi(\varphi(b)) = \varphi\psi(a)\varphi\psi(b)$$

Отже, добуток автоморфізмів $\varphi\psi$ також є автоморфізмом поля P, і множення автоморфізмів є внутрішньою алгебраїчною операцією на множині $Aut\ P$.

Перевіримо асоціативність множення автоморфізмів.

Нехай φ, ψ, $\tau \in Aut\ P$ і a – довільний елемент з поля P.

Оскільки, $\varphi(\psi\,\tau)(a) = (\psi\,\tau)(\varphi(a)) = \tau(\psi(\varphi(a)))$ і

$$(\varphi\psi)\tau(a) = \tau((\varphi\psi)(a)) = \tau(\psi(\varphi(a))),$$

то $\varphi(\psi\,\tau) = (\varphi\psi)\tau$ для довільних автоморфізмів φ, ψ, $\tau \in Aut\ P$.

Доведемо існування одиничного елемента у множині $Aut\ P$. Нехай $\varphi \in Aut\ P$ і e – такий автоморфізм поля P, що $\forall\ a \in P$

$$(\varphi \cdot e)(a) = (e \cdot \varphi)(a) = \varphi(a).$$

Тоді $(e \cdot \varphi)(a) = \varphi(e(a)) = \varphi(a)$.

Отже, $e(a) = a$ для довільного $a \in P$, $e(a)$ – тотожний автоморфізм.

Нарешті, нехай $\varphi' \in Aut\ P$ – такий автоморфізм поля P, що

$$\varphi \cdot \varphi' = \varphi' \cdot \varphi = e.$$

Тоді $(\varphi \cdot \varphi')(a) = \varphi'(\varphi(a)) = e(a) = a$, $\varphi'(\varphi(a)) = a$ і φ' – відображення, обернене до φ, тобто $\varphi'(a) = \varphi^{-1}(a)$.

Отже, $(Aut\ P; \cdot)$ – група.

2) Знайдемо усі автоморфізми поля Q.

Оскільки $\varphi(a) = \varphi(a + 0) = \varphi(a) + \varphi(0)$, то $\varphi(0) = 0$, $a \in Q$.

З іншого боку для довільного $a \neq 0$ $\varphi(a) \neq 0$, тому

$\varphi(a) = \varphi(a \cdot 1) = \varphi(a)\ \varphi(1)$ і $\varphi(1) = 1$.

Але тоді $1 = \varphi(1) = \varphi((-1)\cdot(-1)) = (\varphi(-1))^2$ і $\varphi(-1) = -1$.

Отже, для довільного $z \in Z$ $\varphi(z) = z$.

Оскільки $1 = \varphi(1) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(a^{-1})$, то $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ для довільного $a \neq 0$. Тому для довільного $q = \dfrac{m}{n} \in Q$ $\varphi(q) = q$.

Таким чином, $(Aut\ Q;\ \cdot) \cong E$ – одинична група.

3) З'ясуємо тепер, якою є група $(Aut\ R;\ \cdot)$. За доведеним $\forall\ q \in Q$ $[\varphi(q) = q]$.

Нехай тепер $a \in R$, $a > 0$. Тоді знайдеться $b \in R$ такий, що $b^2 = a$,

$$\varphi(a) = \varphi(b^2) = (\varphi(b))^2 > 0.$$

Отже, образом додатного дійсного числа є додатне дійсне число. Неважко довести, що образом від'ємного числа є число від'ємне.

Припустимо, що група $Aut\ R$ містить автоморфізм φ, відмінний від одиничного, тобто знайдеться $a \in R$ таке, що $\varphi(a) \neq a$. Без порушень загальності можна вважати, що $a > 0$. Можливі наступні випадки:

1) $\varphi(a) = b$, де $b > a$. Тоді існує таке $q \in Q$, що $a < q < b$, звідки $a - q < 0 < b - q$ і $\varphi(a - q) < 0$.
   З іншого боку, $\varphi(a - q) = \varphi(a) - \varphi(q) = b - q > 0$. Отже, в цьому випадку отримуємо протиріччя.
2) Нехай $\varphi(a) = b$ і $b < a$. Аналогічно, і в цьому випадку існує таке $q \in Q$, що $b < q < a$, $b - q < 0 < a - q$, тобто $\varphi(a - q) > 0$. Проте $\varphi(a - q) = \varphi(a) - \varphi(q) = b - q < 0$.
   Знову отримуємо протиріччя, тобто, єдиним можливим варіантом є $\varphi(a) = a$ і $(Aut\ R;\ \cdot) \cong E$ – також одинична група.

Відповідь: $(Aut\ Q;\ \cdot) \cong E$, $(Aut\ R;\ \cdot) \cong E$.

КОНКУРСНІ ЗАВДАННЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

2006 рік

1. *Розв'язати в цілих числах рівняння:* $8x + y^2 - 2z^2 = 3$.

Розв'язання

Розглянемо два випадки у залежності від парності числа z.

Якщо z – число парне, тобто $z = 2k$, то $y^2 = -8x + 8k^2 + 3$ і $y^2 \equiv 3 \pmod 8$, що неможливо, оскільки квадрати цілих чисел при діленні на 8 можуть давати остачі 0, 1 або 4.

Нехай z – непарне число, тобто $z = 2k + 1$. Тоді $y^2 = 8x + 2(2k+1)^2 + 3 = 8x + 8k^2 + 8k + 5$ і $y^2 \equiv 5 \pmod 8$. Протиріччя. Отже, вказане рівняння цілих розв'язків не має.

Відповідь: цілих розв'язків немає.

2. *Довести, що серед чисел 3, 13, 103, 1003, 10003, ... є безліч складених.*

Розв'язання

Очевидно, що усі числа даної послідовності, починаючи з другого, можна подати у вигляді $a_n = 10^n + 3$, $n \in N$.

Оскільки $10^4 \equiv 4 \pmod 7$ і $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, то

$$10^{6k+4} \equiv 4 \pmod 7,\ \forall\ k \in N.$$

Значить, $10^{6k+4} + 3 \equiv 7 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$ і тому $a_{6k+4} \vdots 7$, для $\forall k \in N$. Таким чином, жодне з чисел 10^{6k+4} не є простим, що і треба було довести.

Відповідь: твердження задачі доведено.

3. *Розв'язати рівняння:* $\arcsin[\sin x] = \arccos[\cos x]$.

Розв'язання

Оскільки $-1 \le \sin x \le 1$ і $-1 \le \cos x \le 1$, то цілі частини функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ можуть приймати лише три значення: 0, 1 та –1. В силу цього рівність $\arcsin[\sin x] = \arccos[\cos x]$ можлива лише у двох випадках:

1) $[\sin x] = 0$, $[\cos x] = 1$, звідки $\cos x = 1$ і $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

   Легко переконатись, що вказані значення задовольняють вихідне рівняння.

2) $[\sin x] = 1$, $[\cos x] = 0$. В цьому випадку $\sin x = 1$ і $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Перевірка доводить, що всі ці значення також є коренями даного рівняння.

Відповідь: $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n, k \in Z$.

Зауваження. Рівняння неважко розв'язати графічно, побудувавши графіки функцій, що стоять у лівій та правій частинах та врахувавши періодичність функції у лівій та правій частинах (період $T = 2\pi$).

4. *Обчислити площу фігури, яка визначається умовами:*

$$y^{2006} + y^{-2006} \le x^{2006} + x^{-2006}, \quad x^2 + y^2 \le 2006.$$

Розв'язання

З умови випливає, що задана множина точок є симетричною відносно осей координат. Тому достатньо знайти площу тієї частини фігури, яка міститься у першій координатній чверті, тобто за умови $y > 0, x > 0$.

В цьому випадку першу нерівність, що визначає дану фігуру, можна спростити: $(y^{2006})^2 x^{2006} + x^{2006} \le (x^{2006})^2 y^{2006} + y^{2006}$,

$$y^{2006} x^{2006} (y^{2006} - x^{2006}) + x^{2006} - y^{2006} \le 0.$$

$$(y^{2006}-x^{2006})(x^{2006}y^{2006}-1)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|y|\le|x|,\\ |xy|\ge 1,\end{cases}\\ \begin{cases}|y|\ge|x|,\\ |xy|\le 1.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\le x,\\ xy\ge 1,\end{cases}\\ \begin{cases}y\ge x,\\ xy\le 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Враховуючи, що $x^2+y^2\le 2006$ – круг радіуса $R=\sqrt{2006}$, вказана область при $x>0, y>0$ має вигляд:

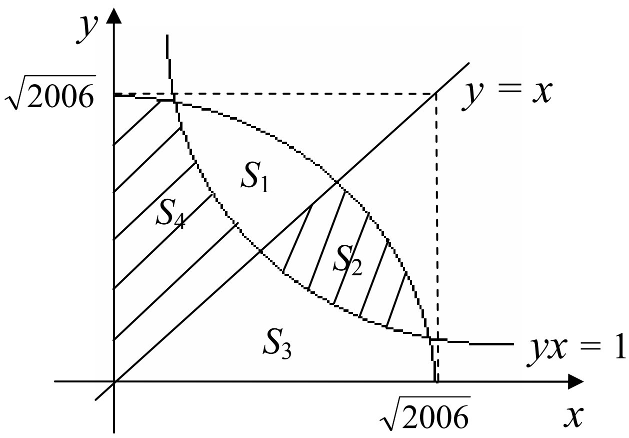

Рис. 3

Отже, її площа S складається з площ S_2 та S_4 заштрихованих областей. Оскільки $S_1=S_2$, а $S_3=S_4$, то

$$S=S_2+S_4=\frac{1}{2}(S_1+S_2+S_3+S_4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi R^2}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2006}{4}=\frac{1003\pi}{4}.$$

Таким чином, площа даної фігури дорівнює $4S=1003\pi$ (кв. од).

Відповідь: 1003π квадратних одиниць.

5. *Довести, що всі числа виду* $a_n=\underbrace{\sqrt{k+\sqrt{k+\ldots+\sqrt{k+\sqrt{k}}}}}_{n}$,

$k, n\in N$, $n\ge 2$ ірраціональні.

Розв'язання

Розглянемо два випадки у залежності від того, чи є число k повним квадратом деякого цілого числа.

1) Нехай k – не є повним квадратом. Тоді $\sqrt{k} \in I$, $(k+\sqrt{k}) \in I$, отже й $a_2 = \sqrt{k+\sqrt{k}} \in I$. Застосовуючи метод математичної індукції по числу доданків, не важко довести, що і число $a_n = \underbrace{\sqrt{k+\sqrt{k+...+\sqrt{k+\sqrt{k}}}}}_{n}$ також є ірраціональним.

2) Розглянемо випадок, коли $k = p^2$, $p \in N$. Тоді $a_2 = \sqrt{k+\sqrt{k}} = \sqrt{p^2+p}$. Покажемо, що і у цьому випадку $a_2 \in I$. Припустимо супротивне. Нехай $a_2 \in Q$, тобто $\sqrt{p^2+p} = \frac{m}{l}$, де $m \in Z$, $l \in N$, $(m, l) = 1$. Піднесемо останню рівність до квадрату: $(p^2+p)l^2 = m^2$. Тоді $m^2 \vdots l^2$, звідки $l = 1$, бо $(m, l) = 1$ за припущенням. Отже, $a_2 = \sqrt{p^2+p} = m \in Z$.

З іншого боку, оскільки $p^2 < p^2 + p < (p+1)^2$, то

$$p < \sqrt{p^2+p} < p+1 \;\text{ і }\; p < m < p+1,$$

що неможливо. Отже, припущення невірне і в цьому випадку $a_2 \in I$. Подальше доведення зводиться до застосування пункту 1.

Отже, при $n \geq 2$ число

$a_n = \underbrace{\sqrt{k+\sqrt{k+...+\sqrt{k+\sqrt{k}}}}}_{n}$, $k \in N$ є ірраціональним.

Відповідь: твердження задачі доведено.

6. *Довести, що якщо у вписаний чотирикутник можна вписати коло, то* $S = \sqrt{abcd}$*, a, b, c, d – довжини його сторін.*

Розв'язання

Будемо шукати площу чотирикутника як суму площ трикутників ABD та BCD:

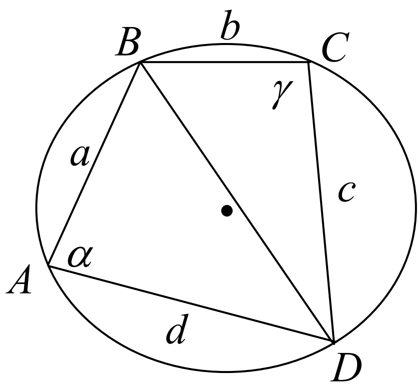

Рис. 4

$$S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}, \text{ тобто}$$

$$S = \frac{1}{2}ad \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}bc \cdot \sin\gamma. \qquad (7)$$

За умовою даний чотирикутник є вписаним у коло, тому $\alpha + \gamma = 180°$, звідки $\gamma = 180° - \alpha$. Підставимо отримане значення у формулу (7). Тоді

$$S = \frac{1}{2}\sin\alpha(ad + bc). \qquad (8)$$

Виразимо діагональ BD з трикутників ABD та BCD, використовуючи теорему косинусів:

$$\begin{cases} BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha, \\ BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma, \end{cases}$$

звідки $a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$,

$$(a-d)^2 + 2ad - 2ad\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc + 2bc\cos\alpha. \qquad (9)$$

Далі, враховуючи, що в чотирикутник можна вписати коло, маємо $a + c = b + d$, тобто $a - d = c - b$. Отже, рівність (9) можна записати у вигляді:

$$ad - bc = \cos\alpha(bc + ad).$$

Приєднуючи до останньої рівності рівність (8), одержимо систему:

$$\begin{cases} 2S = \sin\alpha(ad + bc), \\ ad - bc = \cos\alpha(bc + ad). \end{cases}$$

Підносячи кожну рівність до квадрата і додавши почленно ліві та праві частини, одержимо:

$$4S^2 + (ad - bc)^2 = (ad + bc)^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha),$$

звідки $4S^2 = 4abcd$ і $S = \sqrt{abcd}$, що й слід було довести.

Відповідь: твердження задачі доведено.

КОНКУРСНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

2007 рік

1. *Дослідити на збіжність ряд:* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{\kappa=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Розв'язання

Оцінимо загальний член даного ряду: $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n \neq 0$.

Отже, даний ряд є розбіжним.

Відповідь: ряд є розбіжним.

2. *Знайти всі неперервні на числовій прямій функції* $f(x)$, *які задовольняють рівняння* $f(x)=1+\int\limits_0^1 xtf(t)dt$.

Розв'язання

Перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$f(x)=1+x\int\limits_0^1 tf(t)dt$$

і позначимо $a=\int\limits_0^1 tf(t)dt$. Отже, $f(x)$ слід шукати у вигляді $f(x) = 1 + ax$.

Підставивши значення функції у попередню рівність, одержимо:

$$a=\int\limits_0^1 t(1+at)dt,\ \text{звідки}\quad a=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{at^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{a}{3},\quad \frac{2}{3}a=\frac{1}{2},\quad a=\frac{3}{4}.$$

Отже, $f(x) = 1 + \frac{3}{4}x$.

Перевірка підтверджує, що знайдена функція є розв'язком даного рівняння.

Відповідь: $f(x) = 1 + \dfrac{3}{4}x$.

3. *Довести, що для всіх* $x \in [-1;\ 1]$ *виконується нерівність:*

$$\left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \right| \le \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Розв'язання

Для довільної неперервно диференційовної функції $f(x)$ та довільного $x \in [0;\ 1]$ за властивостями визначеного інтеграла та формулою Лагранжа мають місце нерівності:

$$\left| f(x) - \int_0^1 f(t)dt \right| \le \int_0^1 \left| f(x) - f(t) \right| dt \le \int_0^1 \left| f'(C)\cdot(x-t)dt \right| \le$$

$$\le \max_{C\in[0;\,1]} \left| f'(C) \right| \cdot \int_0^1 |x-t|dt \le \frac{1}{2} \max_{C\in[0;\,1]} \left| f'(C) \right|.$$

Покладемо $f(x) = e^{-x^2}$ та оцінимо $\max\limits_{C\in[0;\,1]} \left| f'(C) \right|$, для цієї функції:

$$\max_{C\in[0;\,1]} \left| f'(C) \right| = \max_{C\in[0;\,1]} \left| -2Ce^{-C^2} \right| = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Отже, враховуючи парність $f(x) = e^{-x^2}$

$$\max_{x\in[-1;\,1]} \left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}dt \right| \le \max_{x\in[0;\,1]} \left| e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}dt \right| \le \frac{1}{\sqrt{2e}},$$

що й треба було довести.

Відповідь: твердження задачі доведено.

4. *Довести, що квадратична форма типу* $F(x,\,y) = x^2 + axy - by^2$ *є мультиплікативною функцією, тобто для довільних пар* (x_1, y_1), $(x_1,\,y_1)$ *існує пара* $(x_3,\,y_3)$ *така, що* $F(x_1, y_1)\cdot F(x_2, y_2) = F(x_3, y_3)$.

Розв'язання

Зазначимо спочатку, що $x^2+axy-by^2=\begin{vmatrix} x & by \\ y & x+ay \end{vmatrix}$. Враховуючи, що детермінант добутку квадратних матриць дорівнює добутку їх детермінантів, одержимо:

$$F(x_1,y_1)\cdot F(x_2,y_2)=\begin{vmatrix} x_1 & by_1 \\ y_1 & x_1+ay_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_2 & by_2 \\ y_2 & x_2+ay_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_1x_2+by_1y_2 & b(x_1y_2+ay_1y_2+x_2y_1) \\ y_1x_2+x_1y_2+ay_1y_2 & by_1y_2+x_1x_2+a(x_1y_2+x_2y_1+ay_1y_2) \end{vmatrix}=$$

$$=(x_1x_2+by_1y_2)^2+a(x_1x_2+by_1y_2)(x_1y_2+x_2y_1+ay_1y_2)-b(x_1y_2+x_2y_1+ay_1y_2)^2=$$

$$=x_3^2+ax_3y_3-by_3^2=F(x_3,\,y_3),$$

де $x_3=x_1x_2+by_1y_2$, $y_3=x_1y_2+x_2y_1+ay_1y_2$. Твердження задачі доведено.

Відповідь: твердження задачі доведено.

5. *K – унітарне кільце, E – його головне унітарне підкільце (тобто найменше підкільце, що містить одиничний елемент e кільця K). Яким є кільце E з точністю до ізоморфізму в залежності від характеристики кільця K?*

Розв'язання

Розглянемо два випадки у залежності від характеристики кільця K.

Якщо $char\ K=0$, то підкільце $E=\{0, \pm e, \pm 2e, \ldots, ke, \ldots\}$, $k\in Z$ є ізоморфним кільцю Z цілих чисел. Ізоморфізмом є функція $\varphi: E\to Z$ така, що $\varphi(ke)=k$, для $\forall\ k\in Z$.

Нехай тепер $char\ K=m\neq 0$. У цьому випадку підкільце E ізоморфне кільцю Z_m класів лишків по модулю m.

Справді, нехай $\varphi: E\to Z_m$ – така функція, що $\varphi(ke)=\bar{k}$, де $\bar{k}\in Z_m$. встановлена відповідність, очевидно, є взаємно однозначною. Перевіримо виконання умов $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ та $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$

для всіх a, $b \in E$. Нехай $a = ke$, $b = k'e$. Тоді, враховуючи властивості класів лишків по модулю m

$$\varphi(a+b) = \varphi((k+k')e) = \overline{k+k'} = \overline{k} + \overline{k'} = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Аналогічно, $\varphi(ab) = \varphi(kk'ee) = \varphi(kk'e) = \overline{k \cdot k'} = \overline{k} \cdot \overline{k'} = \varphi(a)\varphi(b)$.

Отже, вказана відповідність є ізоморфізмом.

Відповідь: якщо $char\ K = 0$, то $E \cong Z$;

якщо $char\ K = m \neq 0$, то $E \cong Z_m$.

6. *Довести, що на колі* $x^2 + y^2 = 2$ *є безліч точок, обидві координати яких раціональні, а на колі* $x^2 + y^2 = 3$ *таких точок не існує.*

Розв’язання

1) Спочатку доведемо, що на колі $x^2 + y^2 = 2$ є безліч точок, обидві координати яких раціональні.

Очевидно, що однією з цих точок є точка A (1; 1). Розглянемо множину прямих, що проходять через точку A та мають кутовий коефіцієнт k, що є раціональним числом: $y - 1 = k(x - 1)$.

Знайдемо точки перетину цих прямих з колом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = kx - k + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = kx - k + 1, \\ x^2 + (kx - k + 1)^2 = 2. \end{cases}$$

Після перетворень дістанемо рівняння:

$$x^2(k^2+1) - x(2k^2 - 2k) + (k^2 - 2k - 1) = 0.$$

Одним з його коренів є $x = 1$. Інший корінь дістанемо з формул Вієта:

$$x = \frac{2k^2 - 2k}{1 + k^2} - 1 = \frac{k^2 - 2k - 1}{1 + k^2}.$$

Відповідно $y = \dfrac{-k^2 - 2k + 1}{1 + k^2}$.

Оскільки $k \in Q$, то й $x \in Q$, $y \in Q$. Отже, на колі $x^2 + y^2 = 2$ є безліч точок з раціональними координатами $\left(\frac{k^2 - 2k - 1}{1 + k^2};\ \frac{-k^2 - 2k + 1}{1 + k^2}\right)$, де $k \in Q$.

2) Тепер покажемо, що на колі $x^2 + y^2 = 3$ немає точок, обидві координати яких є раціональними числами.

Припустимо супротивне. Нехай $x = \frac{p}{q}$, де $(p, q) = 1$, $y = \frac{r}{s}$, де $(r, s) = 1$, $p, q, r, s \in Z$, $s \neq 0$, $q \neq 0$ раціональні розв'язки рівняння $x^2 + y^2 = 3$. Тоді

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2} = 3, \text{ звідки } p^2 s^2 + r^2 q^2 = 3q^2 s^2.$$

Позначимо $ps = a$, $qr = b$, $sq = c$, $a, b, c \in Z$.

Тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$a^2 + b^2 = 3c^2.$$

Використаємо метод нескінченного спуску. Оскільки права частина рівності ділиться на 3, то й ліва частина також повинна ділитися на 3. Але, як відомо, квадрати цілих чисел при діленні на 3 можуть давати остачі 0 або 1. Значить, $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$. Тоді $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ і $b^2 \equiv 0 \pmod 3$. Це означає, що $a = 3a_1$, $b = 3b_1$.

Отже, рівняння можна записати у вигляді:

$$(3a_1)^2 + (3b_1)^2 = 3c^2, \quad \text{звідки} \quad 3a_1^2 + 3b_1^2 = c^2.$$

Оскільки ліва частина рівності ділиться на 3, то і права буде ділитися на 3. Отже, $c = 3c_1$. Підставивши це значення в останнє рівняння і скоротивши на 3, одержимо

$$a_1^2 + b_1^2 = 3c_1^2.$$

Продовжуючи процес далі, неважко довести, що розв'язками рівняння будуть трійки чисел $\left(\frac{a}{3^n}, \frac{b}{3^n}, \frac{c}{3^n}\right)$ для $\forall\ n \in N$. При $n \to \infty$ розв'язком буде трійка чисел (0, 0, 0), що неможливо, бо $c = qs \neq 0$. Протиріччя.

Отже, припущення невірне і дане рівняння раціональних розв'язків не має.

Відповідь: твердження задачі доведено.

КОНКУРСНІ ЗАВДАННЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

2007 рік

1. *Розв'язати в цілих числах рівняння:* $x^2 - xy + y^2 + 1 = 6n$, $n \in Z$.

Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді:

$$(x + y)^2 - 3xy + 1 = 6n$$

та знайдемо остачі, які дають при діленні на 3 ліва та права частини рівняння. Оскільки $(x + y)^2 \equiv 0 \pmod 3$ або $(x + y)^2 \equiv 1 \pmod 3$ як квадрати цілих чисел і $3xy \,⋮\, 3$, $6n \,⋮\, 3$, то ліва частина при діленні на 3 дає остачу 2 або 1. При цьому права частина при діленні на 3 дає остачу 0. Таким чином, рівняння в цілих числах розв'язків не має.

Відповідь: цілих розв'язків немає.

2. *Довести, що для всіх* $n \in N$ *виконується нерівність*

$$(2n+1)^n \geq (2n)^n + (2n-1)^n$$

При яких n має місце рівність?

Розв'язання

Очевидно, що дана нерівність рівносильна наступній:

$(2n+1)^n - (2n-1)^n \geq (2n)^n$. Доведемо її.

Оскільки

$$(2n+1)^n - (2n-1)^n = (2n)^n + C_n^1(2n)^{n-1} + C_n^2(2n)^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 2n + 1 -$$

$$- (2n)^n + C_n^1(2n)^{n-1} - C_n^2(2n)^{n-2} + \ldots + (-1)^n C_n^{n-1} \cdot 2n + (-1)^{n+1} \cdot 1 =$$

$$= 2C_n^1(2n)^{n-1} + 2C_n^3(2n)^{n-3} + \ldots + 2C_n^{n-1} \cdot 2n + 1 + (-1)^{n+1} = (2n)^n + A,$$

де $A = 2C_n^3(2n)^{n-2} + \ldots + 2C_n^{n-1} \cdot 2n + 1 + (-1)^{n+1}$, то враховуючи, що $A \geq 0$, одержимо $(2n+1)^n - (2n-1)^n \geq (2n)^n$ або $(2n+1)^n \geq (2n)^n + (2n-1)^n$.

Очевидно, що рівність досягається при $A = 0$, тобто при $n = 2$ або $n = 1$.

Відповідь: твердження задачі доведено; рівність має місце при $n = 2$ або $n = 1$.

3. *Знайти всі прості числа p і q такі, що число* $p^q + q^p$ *також є простим.*

Розв'язання

Якщо числа p і q мають однакову парність, то $p^q + q^p$ також буде парним числом, більшим за 2. Тому, у цьому випадку, $p^q + q^p$ не може бути простим числом. З цього випливає, що числа p та q мають різну парність. Враховуючи, що вони прості, одне з них дорівнює 2, а інше є непарним.

Нехай для визначеності $p = 2$, а q – непарне просте число.

Якщо $q = 3$, то $p^q + q^p = 3^2 + 2^3 = 17$ – просте число.

Далі будемо вважати, що $q \neq 3$, тобто $q \equiv \pm 1 \pmod 3$. У цьому випадку

$$p^q + q^p = 2^q + q^2 = (3-1)^q + q^2 \equiv (-1)^q + 1 \pmod 3 \equiv$$
$$\equiv -1 + 1 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3,$$

оскільки q – число непарне. Отже, $\left(2^q + q^2\right) \vdots 3$ при $q > 3$ і тому умову задачі задовольняють лише пари $p = 2$, $q = 3$ або $p = 3$, $q = 2$.

Відповідь: $p = 2$, $q = 3$ або $p = 3$, $q = 2$.

4. *Розв'язати в дійсних числах систему рівнянь*

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Враховуючи, що $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$ і за умовою $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, одержимо $xy + xz + yz = 3$.

З іншого боку, $2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$.

Оскільки ліва частина останньої рівності дорівнює 0, то

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0.$$

Отже, $x = y = z$. Підставляючи ці значення у задану систему, знаходимо $x = y = z = 1$.

Відповідь: (1; 1; 1).

5. *Знайти всі n натуральні такі, що* $[\log_2 n] = [\log_3 n]$.

Розв'язання

Покладемо: $[\log_2 n] = [\log_3 n] = m$, де $m \in Z$. За властивостями цілої частини числа

$$\begin{cases} m \le \log_2 n < m + 1, \\ m \le \log_3 n < m + 1, \end{cases}$$

тому $2^m \le n < 2^{m+1}$ і $3^m \le n < 3^{m+1}$. Отже, $2^m \le 3^m \le n < 2^{m+1} < 3^{m+1}$, звідки $3^m < 2^{m+1}$.

З іншого боку, для всіх $k \in N$, $k \ge 2$ виконується нерівність $3^k > 2^{k+1}$.

Доведемо це методом математичної індукції. При $k = 2$ нерівність вірна $3^2 > 2^3$. Припустимо, що нерівність має місце при $k = l$, тобто $3^l > 2^{l+1}$ і доведемо її при $k = l + 1$. Оскільки $3^{l+1} > 3 \cdot 2^{l+1} = 2^{l+1} + 2^{l+2} > 2^{l+2}$, то нерівність справедлива для всіх $k \in N$, $k \ge 2$.

Отже, $k = 0$ або $k = 1$.

Нехай $k = 0$. Підставляючи це значення у систему нерівностей замість m, одержимо: $\begin{cases} 1 \le n < 2, \\ 1 \le n < 3, \end{cases}$ звідки $n = 1$.

Враховуючи, що $[\log_2 n] = [\log_3 n] = 0$, значення $n = 1$ є розв'язком вихідного рівняння.

Нехай тепер $k = 1$. Тоді $\begin{cases} 2 \le n < 4, \\ 3 \le n < 9 \end{cases}$ і $n = 3$.

Оскільки $[\log_2 n] = [\log_3 n]$ = 1, то n = 3 також є розв’язком даного рівняння.

Відповідь: $n = 3$, $n = 1$.

6. *В середині трикутника ABC вибрані точки M та K. Відстані від точки M до сторін трикутника рівні 1, 3 та 15, а від точки K відповідно 4, 5 та 11. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник ABC.*

Розв’язання

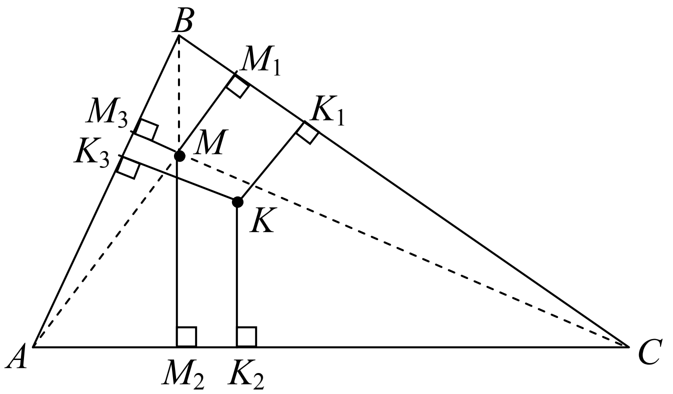

Рис. 5

Позначимо довжини сторін даного трикутника a, b, c і візьмемо в середині нього точки M і K, відстані від яких до a, b та c дорівнюють відповідно: $MM_1 = 1$, $MM_2 = 3$, $MM_3 = 15$ та $KK_1 = 4$, $KK_2 = 5$, $KK_3 = 11$.

Очевидно, що $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} + S_{\Delta BMC}$, тобто

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(a \cdot 1 + b \cdot 3 + c \cdot 15) \text{ або}$$

$$2S_{\Delta ABC} = a + 3b + 15c \qquad (10).$$

З іншого боку, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AKB} + S_{\Delta AKC} + S_{\Delta BKC}$,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(4a + 5b + 11c), \text{ звідки}$$

$$2S_{\Delta ABC} = 4a + 5b + 11c \qquad (11).$$

Оскільки $S_{\Delta ABC} = rp$, де r – радіус вписаного кола, а p – півпериметр, то

$$2S_{\Delta ABC} = r(a + b + c) \qquad (12).$$

Об’єднаємо рівності (10)-(12) у систему

$$\begin{cases} 2S_{\Delta ABC} = a + 3b + 15c, \\ 2S_{\Delta ABC} = 4a + 5b + 11c, \\ 2S_{\Delta ABC} = r(a + b + c), \end{cases}$$

Звідки, помноживши друге рівняння на 2 та віднявши від нього перше, будемо мати: $2S_{\Delta\, ABC} = 7(a + b + c)$. Враховуючи третє рівняння системи, приходимо до висновку, що $r = 7$.

Відповідь: $r = 7$.

Навчальне видання

Збірник конкурсних завдань
ІІ етапу Всеукраїнської студентської олімпіади з математики
серед студентів вищих педагогічних навчальних закладів
2005–2007 рр.

Методичні рекомендації

Укладачі: Лиман Федір Миколайович,
Лукашова Тетяна Дмитрівна,
Погребний Валерій Данилович

Відповідальний за випуск **Бугаєнко В.В.**
Комп'ютерний набір та верстка **Удовиченко О.М.**

Здано в набір 02.01.08. Підписано до друку 05.02.08.
Формат 60×84/16. Гарн. Times New Roman. Друк ризогр. Папір друк.
Умовн. друк. арк. 2,32. Обл.- вид. арк. 1,72. Тираж 100 прим. Вид. № 21.

СумДПУ ім. А.С. Макаренка
40002, м. Суми, вул. Роменська, 87

Виготовлено на обладнанні СумДПУ ім. А.С. Макаренка. Зам. №